Kap. III : Ungl.-en

- Lineare Ungl.: $-3x-7 \geq 4$ (a)

  Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die (a) wahr ist.

  (a) $-3x-7 \geq 4 \quad | : (-3)$

  $\Leftrightarrow$ (b) $x + \frac{7}{3} \leq -\frac{4}{3} \quad | -\frac{7}{3}$

  $\Leftrightarrow$ (c) $x \leq -\frac{11}{3}$

  auch $-\frac{11}{3}$ ist eine Lsg.!

  $\Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty; -\frac{11}{3}]$

* Quadratische Ungln:

Gesucht sind wieder alle Lsgen von Ungln des Typ $x^2 + px + q \left\{\begin{matrix}\geq \\ \leq\end{matrix}\right\} 0$, d.h. wir suchen alle reellen Zahlen x, für die die Ungleichung (sinnvoll definiert und) erfüllt ist.

Löse $2x^2 \geq 2x + 12$.

1) Erstmal in Normalform bringen (s.o.) durch Äquivalenzumformungen:

$$2x^2 \geq 2x + 12 \quad | -2x - 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 12 \geq 0 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq 0$$

2) Quadr. Ergz.:

$$0 \leq x^2 - x - 6 = x^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} x - 6$$

$$= \left(x^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}\right) - \left(\tfrac{1}{4} + 6\right) \qquad \text{NR: } 6 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25}{4}$$

$$= \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4} \quad | + \tfrac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 \geq \tfrac{25}{4} \quad | \sqrt{\cdot}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x - \tfrac{1}{2}\right| \geq \tfrac{5}{2}$$

Nun treten 2 Fälle auf: $x \geq \frac{1}{2}$ und $x < \frac{1}{2}$

$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq |x - \frac{1}{2}| = x - \frac{1}{2} \quad | + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ (CHECK: $\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ ✓)

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - x \quad | + x - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$ (CHECK: $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$ ✓)

Es muss $x \geq 3$ ODER $x \leq -2$ erfüllt sein, damit Ungl. gilt

Wir erhalten $\mathbb{L} = (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$.

Anderes Bsp.: $2x^2 - 6x + 4 \geq 10(x^2 + x + 1)$

1) In Normalform bringen:

$2x^2 - 6x + 4 \geq 10(x^2 + x + 1) = 10x^2 + 10x + 10 \quad | -2x^2 + 6x - 4$

$\Leftrightarrow 0 \geq 8x^2 + 16x + 6 \quad | : 8$

$\Leftrightarrow 0 \geq x^2 + 2x + \frac{3}{4}$

2) Quadr. Ergänz.:

$0 \geq x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + \frac{3}{4} = (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1) - (1 - \frac{3}{4})$

$= (x+1)^2 - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq (x+1)^2 \quad | \sqrt{\cdot}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq |x + 1|$

Jetzt 2 Fälle: $x + 1 \geq 0$, $x + 1 < 0$:

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq |x + 1| = x + 1 \quad | -1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq x$

$x+1<0 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq |x+1| = -1-x \quad |+x-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Beachte jetzt muss sowohl $x \geq -\frac{3}{2}$ als auch $x \leq \frac{1}{2}$ gelten, damit $|x+1| \leq \frac{1}{2}$ erfüllt ist!

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$