Kap. II

Gleichungen in einer Variablen

- Was ist eine Lösung einer Glg.?

  $x + 3 = 4 \qquad (*)$

  Lösen bedeutet, alle $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Glg. $(*)$ erfüllt ist

- Eine Glg ist eine Aussage. Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Aussage wahr ist.

- Die Menge alles $x \in \mathbb{R}$, für die $(*)$ wahr ist, bezeichnen wir als Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

- Die Menge $\mathbb{L}$ bestimmen wir durch Äquivalenzumformungen, die $(*)$ in gleichwertige, aber einfachere Aussagen umwandeln:

  $(*): \quad x + 3 = 4 \qquad | - 3$

  $\Leftrightarrow (**): \quad x = 1$

  $\Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}.$

Bsp. (a) $5x - 7 = 15 \quad | + 7$

$\Leftrightarrow$ (b) $5x = 22 \quad | : 5$

$\Leftrightarrow$ (c) $x = \frac{22}{5}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ \frac{22}{5} \}$

(a) $2x^2 - 4x = 7$

1. Schritt: Bringe (a) durch Äq.-Umfgn. in die Normalform: $x^2 + px + q = 0$

(a) $2x^2 - 4x = 7 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow$ (b) $x^2 - 2x = \frac{7}{2} \quad | - \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow$ (c) $x^2 - 2x - \frac{7}{2} = 0$

Normalform mit $p = -2$, $q = -\frac{7}{2}$

p-q-Formel: Die Gl. $x^2 + px + q = 0$ hat die Lsgen

$$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

sofern $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, hat Gl. $x^2 + px + q = 0$ keine Lsg.

$p = -2$, $q = -\frac{7}{2} \Rightarrow$

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{7}{2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \}$.

- Wurzelgleichungen

(a) $4\sqrt{x-\sqrt{x-4}} = 8$

Damit die Gleichung überhaupt eine Aussage definiert, müssen wir $x \geq 4$ fordern (damit $\sqrt{x-4}$ existiert) und außerdem, dass $x \geq \sqrt{x-4}$ gilt. Diese Bedg. behalten wir im Hinterkopf.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\sqrt{x-\sqrt{x-4}} = 2 \quad |(\cdot)^2$

$\Rightarrow$ (c) $x-\sqrt{x-4} = \left(\sqrt{x-\sqrt{x-4}}\right)^2 = 2^2 = 4.$

Jetzt alle Wurzelterme auf eine Seite:

(c) $x-\sqrt{x-4} = 4 \quad |-4+\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow$ (d) $x-4 = \sqrt{x-4} \quad |(\cdot)^2$

$\Leftrightarrow$ (e) $(x-4)^2 = x-4$

$\uparrow$

$\Leftrightarrow$ (f) $x^2-8x+16 = x-4 \quad |-x+4$

$\Leftrightarrow$ (g) $x^2-9x+20 = 0 \quad (p=-9,\ q=20)$

$\Leftrightarrow$ (h) $x_\pm = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-20} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}-\frac{80}{4}}$

$= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ (i) $x_+ = 5, \quad x_- = 4$

Also sind $x_+ = 5$ und $x_- = 4$ alle möglichen Lsg.

Nun müssen wir noch die Bedingungen – und • überprüfen:

– : $x_+ - 4 = 1 \geq 0$ ✓, $x_- - 4 = 0 \geq 0$ ✓

• : $x_+ - \sqrt{x_+ - 4} = 5 - \sqrt{1} = 4 \geq 0$ ✓

$x_- - \sqrt{x_- - 4} = 4 - \sqrt{0} = 4 \geq 0$ ✓

Damit sind x_+ und x_- tatsächlich Lsg., und weil es keine anderen Lsgen geben kann, folgt $\mathbb{L} = \{4, 5\}$.

• Betragsgln.: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(a) $|x+1| + 4 = |2x-4|$

Hier müssen wir 4 Fälle unterscheiden:

1.1: $(x+1 \geq 0) \wedge (2x-4 \geq 0)$,

1.2: $(x+1 \geq 0) \wedge (2x-4 < 0)$,

2.1: $(x+1 < 0) \wedge (2x-4 \geq 0)$,

2.2: $(x+1 < 0) \wedge (2x-4 < 0)$

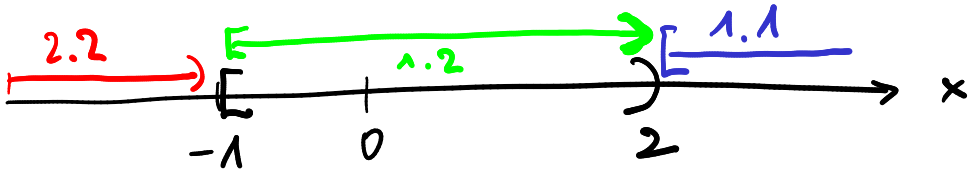
Diese sind jeweils äquivalent zu folgenden Fällen:

1.1: $(x \geq -1) \wedge (x \geq 2) \Leftrightarrow x \geq 2$,

1.2: $(x \geq -1) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow -1 \leq x < 2$,

2.1: $(x < -1) \wedge (x \geq 2)$ nie erfüllt!

2.2: $(x < -1) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow x < -1$.



1.1 : $x \geq 2$: $|x+1| = x+1$, $|2x-4| = 2x-4$

(a) $\Leftrightarrow$ $(x+1) + 4 = x+5 = 2x-4$ $\quad|-x+4$ (b)

$\Leftrightarrow$ (c) $x = 9$ (nicht prüfen: $x \geq 2$? ✓)

also ist $x = 9$ eine Lsg.

1.2: $-1 \leq x < 2$: $|x+1| = x+1$, $|2x-4| = 4-2x$

(a) $\Leftrightarrow$ $x+1+4 = |2x-4| = 4-2x$ $\quad|+2x-5$

$\Leftrightarrow$ (b) $3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

(prüfe: $-1 \leq -\frac{1}{3} < 2$ ✓) $\Rightarrow$ $-\frac{1}{3}$ ist Lsg.

2.2: $x < -1$: $|x+1| = -x-1$, $|2x-4| = 4-2x$

(a) $\Leftrightarrow$ $-x-1+4 = |x+1|+4 = |2x-4| = 4-2x$ $\quad|+2x-3$

$\Leftrightarrow$ (b) $x = 1$ (prüfe: $1 < -1$ ↯

$\Rightarrow$ $x=1$ ist keine Lsg.!)

$\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{3}; 9\}$.