Technische Universität Braunschweig

3. Übungsblatt

Ausgabe: 12.11.2026

Abgabe: 19.11.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Linear Algebra für Elektrotechnik WiSe 26/27 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit den Namen und Matrikelnummern beider Abgabepartner, sowie der Übungsgruppe, welcher Sie zugeordnet sind

Aufgabe 3.1 (2+2+2 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}^N$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen N-tupel.

(a) Es sei $N \geq 2$. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{R}^N$ definieren.

$$U := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, x_N = \sum_{n=1}^{n-1} x_n \right\},$$

$$W := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, x_1 = x_N^3 \right\}.$$

(b) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \subset \mathbb{R}^3$ linear abhängig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Mengen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$, $\{\vec{x}, \vec{z}\}$ und $\{\vec{z}, \vec{y}\}$ linear unabhängig sind.

(c) Es sei die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

gegeben. Bestimmen Sie eine linear unabhängige Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\operatorname{span}(M') = \operatorname{span}(M)$.

Aufgabe 3.2 (3+3 Punkte)

Es sei $\mathbb{C}^N$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen N-tupel.

(a) Es sei $\vec{w} \in \mathbb{C}^N$. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{C}^N$ definieren.

$$S \coloneqq \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N \,\middle|\, \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 + \cdots \overline{w_N} z_N = 0 \right\},$$

$$T \coloneqq \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N \,\middle|\, \mathrm{Re}\{z_1\} = \ldots = \mathrm{Re}\{z_N\} = 0 \right\}.$$

(b) Gegeben sei die linear unabhängige Menge

$$L \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^4 .$$

Bestimmen Sie eine weitere linear unabhängige Menge L' mit $L \subseteq L'$ und $\mathrm{span}(L') = \mathbb{C}^4$.

Aufgabe 3.3 (3+3 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ und Π_N die Menge der komplexen Polynome vom Grad kleiner gleich N, d.h.

$$\Pi_N \coloneqq \left\{ P(z) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k \,\middle|\, \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Π_N, bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar, einen $\mathbb{C}$-Vektorraum definiert.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $P_1, \ldots, P_n \in \Pi_N$ Polynome mit $P_1 \neq 0$ und

$$\forall\, 1 \leq i < j \leq n : \ \mathrm{Grad}(P_i) < \mathrm{Grad}(P_j) .$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{P_1, \ldots P_n\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3.4 (6 Punkte)

Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter sei $X' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq X$ eine nicht-leere endliche Teilmenge. Für einen Vektor $\vec{x} \in X$ bezeichne

$$\mathrm{Anz}(X'; \vec{x}) \coloneqq |\{\vec{\alpha} \in \mathbb{K}^n \,|\, \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{x}\}|$$

die Anzahl der verschiedenen Linearkombinationen der Vektoren in X', die $\vec{x}$ darstellen. Zeigen Sie, dass

$$\forall\, \vec{x} \in X : \quad \mathrm{Anz}(X'; \vec{x}) \in \{0, 1, \infty\} .$$

Aufgabe 3.5 (4 Bonuspunkte) Linearkombination

Affine Achsensysteme: Die analytische Beschreibung der Struktur und Geometrie eines Kristalls geschieht mit Hilfe von Koordinaten und Vektoren in einem Koordinatensystem, das durch geeignete Wahl der Achsen dem Kristall angepasst ist.
Affine Basis: Im dreidimensionalen Raum bilden drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ ein linear unabhängiges System der Ordnung 3, wenn die drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ nicht in einer Ebene liegen.
Kubisches Gitter: Basisvektoren sind die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z = (1\,,0\,,0),\ (0\,,1\,,0),\ (0\,,0\,,1)$.
Monoklines Gitter: Basisvektoren sind $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3 = (1\,,0\,,0),\ (0\,,1\,,0),\ (0\,,1\,,\sqrt{3})$.

a) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren für ein kubisches Gitter linear unabhängig sind.

b) Die Atome sind im kubischen Gitter flächenzentriert angeordnet und deren Lage sind durch 3 Vektoren beschrieben $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$, $(0, k, k)$. Bitte zeigen Sie für ein Atom, dass dieses in einer Fläche liegt.

c) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren für das monokline Gitter linear unabhängig sind.

d) Zeigen Sie, dass für ein raumzentriertes Gitter das Atom mit dem Ortsvektor $(1, 1, \sqrt{3})$ nicht in der Fläche liegt, die von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ aufgespannt wird.

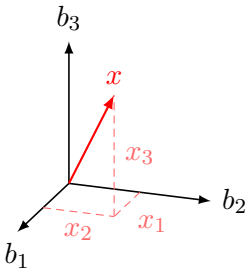


Abbildung 1: Beispielhafte Linearkombination im kartesischen Koordinatensystem