IV. Vektorräume

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der allgemeinen Definition eines Vektorraums. Wir notieren im Folgenden mit $\mathbb{K}$ den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, d.h. es ist (durchgehend) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder (durchgehend) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Die Theorie der Vektorräume lässt sich weitgehend auch genauso für einen allgemeinen Körper $\mathbb{F}$ entwickeln. Beispielsweise würden wir mit $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ auch Vektorräume über den rationalen Zahlen oder mit $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ Vektorräume über den Restklassenring $\mathbb{Z}_p$ erhalten, falls $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und somit $\mathbb{Z}_p$ ein Körper sind.

IV.1. Definition eines Vektorraums

Definition IV.1. Eine Menge X heißt **Vektorraum über** $\mathbb{K}$ oder $\mathbb{K}$**-Vektorraum** $:\Leftrightarrow$
Auf X sind Addition $+ : X \times X \to X$ und Multiplikation mit einem Skalar $(\cdot) : \mathbb{K} \times X \to X$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(i) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X: \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \qquad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \tag{IV.1}$$

$$(ii) \quad \exists \vec{0} \in X \ \forall \vec{a} \in X: \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}, \tag{IV.2}$$

$$(iii) \quad \forall \vec{a} \in X \ \exists (-\vec{a}) \in X: \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}, \tag{IV.3}$$

$$(iv) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \quad \begin{cases} \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}, \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, \end{cases} \tag{IV.4}$$

$$(v) \quad \forall \vec{a} \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \qquad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}. \tag{IV.5}$$

Die Elemente von X heißen **Vektoren**, $\vec{0} \in X$ ist der **Nullvektor**. Vektorräume über $\mathbb{R}$ bezeichnet man auch als **reelle Vektorräume**, Vektorräume über $\mathbb{C}$ als **komplexe Vektorräume**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichungen (IV.1), (IV.2) und (IV.3) besagen zusammen, dass X bezüglich der Addition $+$ eine abelsche Gruppe bildet.

- *Multiplikation mit einem Skalar* und *Skalarprodukt* ist nicht dasselbe.
- $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. (Dieses Beispiel ist allerdings etwas künstlich.)
- Sei $N \in \mathbb{N}$. Schreiben wir

$$A^N \;:=\; \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{N Faktoren}}, \tag{IV.6}$$

für die Menge aller N-Tupel in A [s. (I.51)], so wird

$$\mathbb{K}^N \;=\; \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \ldots, x_N \;\in\; \mathbb{K} \right\} \tag{IV.7}$$

bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar,

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} \gamma x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \gamma x_N + y_N \end{pmatrix} \tag{IV.8}$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dabei sind

$$\vec{0} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_N \end{pmatrix}. \tag{IV.9}$$

- Für $N = 1, 2, 3$ gewinnt man durch Zeichnungen eine gewisse Vorstellung von den Vektoren in $\mathbb{R}^N$.
- Schränkt man bei den komplexen Zahlen die Multiplikation auf die reellen Elemente ein, so ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (mit Dimension 2, s.u.).
- Ein weiteres Beispiel eines Vektorraums ist die Menge der reellen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

$$\mathcal{F} \;:=\; \{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}\}. \tag{IV.10}$$

Mit $f, g \in \mathcal{F}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ wird $\mathcal{F}$ durch

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta]: \quad (f + \gamma \cdot g)(x) \;:=\; f(x) + \gamma \cdot g(x) \tag{IV.11}$$

zum reellen Vektorraum. Diese Festlegung wird auch als *punktweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar* bezeichnet. Dabei sind

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta]: \quad 0_{\mathcal{F}}(x) \;:=\; 0_{\mathbb{R}}, \quad (-f)(x) \;:=\; -f(x). \tag{IV.12}$$

Für diesen Vektorraum $\mathcal{F}$ liefert eine Zeichnung eine gewisse Anschauung.

- Das obige Beispiel lässt sich noch wie folgt verallgemeinern. Sind $A \neq \emptyset$ eine Menge und X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, so wird durch punktweise Addition und punktweise Multiplikation mit einem Skalar wie in (IV.11) auch der Funktionenraum

$$\mathcal{F}' \;:=\; \{f : A \to X\} \tag{IV.13}$$

zum Vektorraum über $\mathbb{K}$.

- Insbesondere ist $\mathcal{F}'$ für $A := \mathbb{Z}_1^N$ und $X := \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ gleich (genauer: *isomorph zu*) $\mathbb{K}^N$,

$$\mathbb{K}^N \;=\; \{f : \mathbb{Z}_1^N \to \mathbb{K}\}. \tag{IV.14}$$

IV.2. Unterräume

Definition IV.2. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$, die selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, heißt **Unterraum** oder **Teilraum**.

Lemma IV.3 (Unterraumkriterium)**.** *Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\Big\{Y \textit{ ist ein Unterraum von } X\Big\} \tag{IV.15}$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{0} \in Y \;\; \textit{und} \;\; \Big\{\forall\, \alpha \in \mathbb{K}\; \forall \vec{x}, \vec{y} \in Y :\; (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \in Y\Big\}.$$

Beweis.
$\underline{\Rightarrow}$: ist trivial.

$\underline{\Leftarrow}$: Setzen wir $\alpha := 1$, so folgt mit $\vec{x}, \vec{y} \in Y$ auch $\vec{x} + \vec{y} \in Y$. Wegen $\vec{0} \in Y$ ist weiterhin mit $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} \in Y$ auch $\alpha\vec{x} = \vec{0} + \alpha\vec{x} \in Y$. Schließlich ist mit $\vec{x} \in Y$ auch $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in Y$. Die anderen Vektorraumeigenschaften übertragen sich von X auf Y. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind $\{\vec{0}\} \subseteq X$ und X selbst Unterräume von X, die man als **triviale Unterräume** bezeichnet.
- Sind X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{x} \in X$, so definiert

$$\mathbb{K} \cdot \vec{x} \;:=\; \big\{\alpha\, \vec{x} \;\big|\; \alpha \in \mathbb{K}\big\} \tag{IV.16}$$

  einen Unterraum von X.
- Sind $\mathbb{K}$ ein Körper und $\vec{a} := (a_1, \ldots, a_N)^T \in \mathbb{K}^N$, so definiert

$$Y_{\vec{a}} \;:=\; \big\{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T \in \mathbb{K}^N \;\big|\; a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_Nx_N = 0\big\} \;\subseteq\; \mathbb{K}^N \tag{IV.17}$$

  einen Unterraum. Dabei notieren wir für

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N)^T \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \tag{IV.18}$$

  den zum Spaltenvektor jeweils gehörigen Zeilenvektor. (Der Superskript "T" bedeutet *Transposition*, was später noch eingeführt wird.)

- Sei $\mathcal{F} = \{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}\}$ der in (IV.10) definierte $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, dann bilden die Mengen der auf $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktionen oder der auf $[\alpha, \beta]$ stetigen und auf (α, β) differenzierbaren Funktionen in $\mathcal{F}$ jeweils einen Unterraum.

Lemma IV.4. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(i) Sind $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\{Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen von X, so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} Y_i$ wieder ein Unterraum von X.

*(ii) Sind $N \in \mathbb{N}$ und $\{Y_n\}_{n=1}^N$ eine endliche Familie von Unterräumen von X, so ist auch ihre **Summe***

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N := \left\{\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \ldots + \vec{y}_N \;\middle|\; \vec{y}_1 \in Y_1,\ \vec{y}_2 \in Y_2, \ldots, \vec{y}_N \in Y_N\right\} \tag{IV.19}$$

wieder ein Unterraum von X.

Beweis. Das Lemma ist eine einfache Folgerung aus dem Unterraumkriterium. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_M \in \mathbb{K}^N$ mit $\vec{a}_i := (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,N})^T$, so definiert

$$Y_{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_M} := Y_{\vec{a}_1} \cap \ldots \cap Y_{\vec{a}_M} \tag{IV.20}$$

nach Lemma IV.4 (i) einen Unterraum in $\mathbb{K}^N$, der durch die Lösungen $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,N}x_N &= 0,\\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,N}x_N &= 0,\\ &\vdots\\ a_{M,1}x_1 + a_{M,2}x_2 + \ldots + a_{M,N}x_N &= 0 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

gegeben ist.

- Sind X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M \in X$, so definiert

$$\mathbb{K}\cdot\vec{x}_1 + \ldots + \mathbb{K}\cdot\vec{x}_M = \left\{\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_M\vec{x}_M \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{K}\right\} \tag{IV.22}$$

nach Lemma IV.4 (ii) einen Unterraum in X.

Definition IV.5. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Ist $S \subseteq X$ eine Teilmenge in X, so heißt der durch

$$\operatorname{span}(S) := \bigcap \left\{Y \;\middle|\; S \subseteq Y \subseteq X,\ Y \text{ ist ein Unterraum}\right\} \tag{IV.23}$$

definierte Unterraum **lineare Hülle von S** oder der **von S erzeugte Unterraum**.

(ii) Sind $Y \subseteq X$ ein Unterraum, $S \subseteq X$ eine Teilmenge in X und $Y = \text{span}(S)$, so heißt S **Erzeugendensystem von $\boldsymbol{Y}$**.

Bemerkungen und Beispiele.

- $\text{span}(S) \subseteq X$ ist der kleinste Unterraum in X, der S enthält. D.h. ist $Y \subseteq X$ ein Unterraum mit $Y \supseteq S$, so ist auch $Y \supseteq \text{span}(S)$.
- Sind X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M \in X$, so ist

$$\text{span}\Big(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\}\Big) \;=\; \mathbb{K} \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \mathbb{K} \cdot \vec{x}_M. \tag{IV.24}$$

IV.3. Lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition IV.6. Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\} \subseteq X$ eine endliche Teilmenge.

(i) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{K}$, so heißt die Summe $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_M\vec{x}_M \in X$ **Linearkombination** (der Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M$). Speziell bezeichnet man $0 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_M = \vec{0}$ als **triviale Linearkombination**.

(ii) Die endliche Teilmenge $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\} \subseteq X$ heißt **linear unabhängig** $:\Leftrightarrow$

Der Nullvektor lässt sich nur als triviale Linearkombination der $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M$ darstellen, d.h.

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{K}: \quad \big\{\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_M\vec{x}_M \;=\; \vec{0}\big\} \;\Rightarrow\; \big\{\alpha_1 = \ldots = \alpha_M = 0\big\}. \tag{IV.25}$$

Die leere Menge $\emptyset$ definieren wir als linear unabhängig.

(iii) Eine (nicht notwendig endliche) Teilmenge $S \subseteq X$ heißt **linear unabhängig** $:\Leftrightarrow$ Jede endliche Teilmenge von S ist linear unabhängig.

(iv) Ist $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\}$ nicht linear unabhängig, so sagt man, die Menge $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\}$ oder die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M$ seien **linear abhängig**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ ist gleichwertig mit ihrer Parallelität, d.h. es gibt ein $\alpha \in \mathbb{K}$, so dass $\vec{x}_1 = \alpha\vec{x}_2$ oder dass $\vec{x}_2 = \alpha\vec{x}_1$ gilt.
- Die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in X$ ist gleichwertig mit ihrer Planarität, d.h. es gibt Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so dass $\vec{x}_1 = \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{x}_3$, dass $\vec{x}_2 = \alpha\vec{x}_3 + \beta\vec{x}_1$ oder dass $\vec{x}_3 = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ gilt.
- Ist $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_M\}$ linear unabhängig, so gilt $\vec{x}_i \neq \vec{0}$, für alle $i = 1, \ldots, M$. Wäre nämlich z.B. $\vec{x}_i = \vec{0}$, dann gälte $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_M\vec{x}_M = \vec{0}$ mit $\alpha_i = 1$ und $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_M = 0$.
- Sei $X = \mathbb{R}^3$. Es soll festgestellt werden, ob die Vektoren

$$\vec{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\; \vec{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\; \vec{x}_3 \;=\; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{IV.26}$$

linear unabhängig sind. Ist $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\alpha_3\vec{x}_2=\vec{0}$ eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination dieser Vektoren, so muss

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\2\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix} \;=\; \vec{0} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{IV.27}$$

gelten, d.h. es müssen

$$\left.\begin{array}{ll}(i): & \alpha_1+\alpha_2=0\\(ii): & 2\alpha_2+\alpha_3=0\\(iii): & \alpha_2+\alpha_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}(ii)-(iii): & \alpha_2=0\\(i): & \alpha_1=-\alpha_2\\(iii): & \alpha_3=-\alpha_2\end{array}\right. \tag{IV.28}$$

gelten. Also sind $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, und damit ist $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ linear unabhängig.

- Mit $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}$ sind auch alle ihre Teilmengen linear unabhängig. Sind z.B. $1\le k<M$ und $\alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k=\vec{0}$, so ist mit $\alpha_{k+1}:=\ldots:=\alpha_M:=0$ auch $\alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_M\vec{x}_M=\vec{0}$, und daraus folgt dann $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$.
- Sei $\vec{x}\in\operatorname{span}\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}\subseteq X$. Dann lässt sich $\vec{x}$ als Linearkombination

$$\vec{x} \;=\; \alpha_1\,\vec{x}_1 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_M\,\vec{x}_M \tag{IV.29}$$

darstellen. Ist $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}$ linear unabhängig, so sind die Koeffizienten α_i eindeutig. Ist nämlich $\vec{x}=\beta_1\vec{x}_1+\ldots+\beta_M\vec{x}_M$, so folgt aus

$$(\alpha_1-\beta_1)\,\vec{x}_1 \;+\; \ldots \;+\; (\alpha_M-\beta_M)\,\vec{x}_M \;=\; \vec{0}, \tag{IV.30}$$

dass $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,\ldots,\alpha_M=\beta_M$.

- Ist $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}$ linear abhängig, so gibt es in (IV.29) mehrere verschiedene Linearkombinationen, die $\vec{x}$ darstellen.
- Es gilt folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}&\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}\text{ ist linear abhängig}\\ \Leftrightarrow\quad &\exists\, i\in\mathbb{Z}_1^M,\ \beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_M:\\ &\qquad \vec{x}_i \;=\; \beta_1\vec{x}_1+\ldots+\beta_{i-1}\vec{x}_{i-1}+\beta_{i+1}\vec{x}_{i+1}+\ldots+\beta_M\vec{x}_M.\end{aligned} \tag{IV.31}$$

- Aus dieser Äquivalenz ergibt sich unmittelbar die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}&\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}\text{ ist linear abhängig }\Leftrightarrow\\ &\exists i\in\mathbb{Z}_1^M:\ \operatorname{span}\Big(\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_{i-1},\vec{x}_{i+1},\ldots,\vec{x}_M\}\Big) \;=\; \operatorname{span}\Big(\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_M\}\Big).\end{aligned} \tag{IV.32}$$

Definition IV.7. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $S\subseteq X$ heißt **Basis von X**

$$:\Leftrightarrow S\text{ ist linear unabhängig und }X=\operatorname{span}(S).$$

Satz IV.8. *Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y=\operatorname{span}(S)\subseteq X$ ein endlich erzeugter Unterraum, $|S|<\infty$. Dann gibt es eine Teilmenge $\widetilde{S}\subseteq S$, die eine Basis von Y bildet. Jede andere Basis von Y hat dieselbe Elementzahl.*

Beweis. Nach dem Ergänzungssatz IV.12 kann $M = \emptyset$ mit Vektoren aus S zu einer Basis $\widetilde{S}$ von Y ergänzt werden.

Ist $\widetilde{T}$ eine andere Basis von Y, so folgt wegen $Y = \operatorname{span}(\widetilde{T})$ nach Satz IV.13, dass $|\widetilde{T}| \geq |\widetilde{S}|$. Genauso folgt natürlich umgekehrt $|\widetilde{S}| \geq |\widetilde{T}|$, also

$$|\widetilde{T}| \;=\; |\widetilde{S}|. \tag{IV.33}$$

□

IV.4. Dimension

Definition IV.9. Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Unterraum.

(i) Sind Y endlich erzeugt und S eine Basis von Y, so setzen wir

$$\dim(Y) \;:=\; |S| \;<\; \infty. \tag{IV.34}$$

(ii) Ist Y nicht endlich erzeugt, so setzen wir

$$\dim(Y) \;:=\; \infty. \tag{IV.35}$$

Die Zahl $\dim(Y)$ bezeichnet man als **Dimension von Y (über $\mathbb{K}$)**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Es ist $\operatorname{span}(\emptyset)$ der Durchschnitt aller Unterräume, die $\emptyset$ enthalten. Also ist $\operatorname{span}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$, und somit

$$\dim\big(\{\vec{0}\}\big) \;=\; 0. \tag{IV.36}$$

- Die **kanonischen Basisvektoren** $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N \in \mathbb{K}^N$,

$$\vec{e}_1 \;:=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \;:=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \;\ldots,\; \vec{e}_N \;:=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{IV.37}$$

  bilden eine Basis in $\mathbb{K}^N$, die so genannte **Standardbasis** $\mathcal{E}_N := \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$. Also ist

$$\dim\big(\mathbb{K}^N\big) \;=\; N. \tag{IV.38}$$

- Der Vektorraum $\mathcal{F}$ der reellen Funktionen auf $[a, b]$ ist unendlichdimensional,

$$\dim \mathcal{F} \;=\; \infty. \tag{IV.39}$$

  So sind z.B. mit $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := x^1$, $f_3(x) := x^2$, $f_4(x) := x^3$, … die Mengen $\big\{f_1, \ldots, f_K\big\}$ linear unabhängig für jedes (noch so große) $K \in \mathbb{N}$.

- Seien $Y', Y \subseteq X$ zwei endlich erzeugte Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums X und $Y' \subseteq Y$. Aus dem Ergänzungssatz folgt sofort, dass

$$\dim(Y') \;\leq\; \dim(Y). \tag{IV.40}$$

- Gelten hingegen $Y' \subseteq Y$ und $\dim(Y') = \dim(Y) < \infty$, so folgt umgekehrt

$$Y' \;=\; Y. \tag{IV.41}$$

- Sind $Y = \operatorname{span}(S)$ endlich erzeugt und $|S| > \dim(Y)$, so ist S linear abhängig.
- Ist umgekehrt $S \subseteq Y$ eine linear unabhängige Teilmenge und $|S| = \dim(Y)$, so ist S eine Basis von Y.
- Ist $\dim(X) = \infty$, so gibt es in X linear unabhängige Teilmengen mit beliebig großer Elementzahl.
- Sind $\dim(X) = \infty$ und $S \subseteq X$ eine Basis, so ist

$$X \;=\; \{\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_N\vec{x}_N \mid N \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{K},\ \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N \in S\}. \tag{IV.42}$$

  D.h. X enthält alle (endlichen) Linearkombinationen von Vektoren aus S. Unendliche Linearkombinationen sind (zunächst) nicht definiert.

Satz IV.10. *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

Beweis. Anwendung des Zornschen Lemmas bzw. des Auswahlaxioms. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Satz IV.10 gilt auch für Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind.

Satz IV.11 (Dimensionsformel)**.** *Seien $Y, Y' \subseteq X$ zwei Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Dann gilt die* ***Dimensionsformel***

$$\dim(Y) + \dim(Y') \;=\; \dim(Y \cap Y') + \dim(Y + Y'). \tag{IV.43}$$

(Wobei auf beiden Seiten ∞ steht, falls $\dim(Y) = \infty$ oder $\dim(Y') = \infty$.)

IV.5. Ergänzungen

IV.5.1. Ergänzungssatz und Austauschsatz von Steinitz

Der Beweis von Satz IV.8 benutzt die beiden folgenden wichtigen Aussagen:

Lemma IV.12 (Ergänzungssatz)**.** *Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Unterraum. Seien weiterhin $M = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subseteq Y$ eine endliche, linear unabhängige (möglicherweise leere) Teilmenge und $S = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n\} \subseteq Y$ ein endliches Erzeugendensystem, $Y = \operatorname{span}(S)$. Dann gibt es eine Teilmenge $\widetilde{S} \subseteq S$, so dass $M \cup \widetilde{S}$ eine Basis von Y bildet.*

Beweis. Betrachte das System von Teilmengen

$$\mathcal{T} \;:=\; \big\{T \subseteq M \cup S \;\big|\; T \supseteq M,\;\; Y = \operatorname{span}(T)\big\}. \tag{IV.44}$$

Wegen $M \cup S \in \mathcal{T}$ ist $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Weiterhin gilt offensichtlich $k \leq |T| \leq k + n$ für jedes $T \in \mathcal{T}$. Sei nun $T \in \mathcal{T}$ eine Menge mit minimaler Elementzahl. Dann erzeugt T den Unterraum Y. Zeigen wir nun noch, dass T linear unabhängig ist, so bildet T eine Basis von Y. Seien also $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_\ell \in S$ so, dass $T = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_\ell\}$. Seien weiterhin $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{K}$, so dass

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k \;+\; \beta_1\vec{y}_1 + \ldots + \beta_\ell\vec{y}_\ell \;=\; \vec{0}. \tag{IV.45}$$

Wäre etwa $\beta_i \neq 0$, so ließe sich $\vec{y}_i$ als Linearkombination der Vektoren in $\widetilde{T} := T \setminus \{\vec{y}_i\}$ darstellen. Dann wäre aber $\operatorname{span}(\widetilde{T}) = \operatorname{span}(T) = Y$ und somit $\widetilde{T} \in \mathcal{T}$. Andererseits wäre dann $|\widetilde{T}| < |T|$, und weil die Zahl der Elemente von T minimal ist, folgte auch $|\widetilde{T}| \geq |T|$. Widerspruch. Es folgt also, dass

$$\beta_1 \;=\; \beta_2 \;=\; \ldots \;=\; \beta_\ell \;=\; 0, \tag{IV.46}$$

was dann

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k \;=\; \vec{0} \tag{IV.47}$$

impliziert. Aus der linearen Unabhängigkeit von M erhalten wir dann auch noch

$$\alpha_1 \;=\; \alpha_2 \;=\; \ldots \;=\; \alpha_k \;=\; 0. \tag{IV.48}$$

Somit ist T linear unabhängig. □

Satz IV.13 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Unterraum mit Basis $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subseteq Y$. Sei weiterhin $S \subseteq Y$ ein Erzeugendensystem von $Y = \operatorname{span}(S)$. Dann gibt es einen Vektor $\vec{y} \in S$, so dass auch $\{\vec{y}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ eine Basis von Y bildet.*

Beweis. Setzen wir $M := \{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$, so ist $M \subseteq Y$ linear unabhängig und kann nach Lemma IV.12 mit $\widetilde{S} \subseteq S$ zu einer Basis ergänzt werden. Dabei ist $\widetilde{S} \neq \emptyset$, da

$\vec{x}_1 \notin \operatorname{span}(M)$. Nehmen wir an, $\widetilde{S}$ enthielte mindestens zwei Vektoren $\vec{y}, \vec{z} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{z}$. Weil $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ eine Basis in Y ist, gäbe es eindeutige α_i und β_i so, dass

$$\vec{y} \;=\; \alpha_1 \vec{x}_1 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_k \vec{x}_k, \tag{IV.49}$$

$$\vec{z} \;=\; \beta_1 \vec{x}_1 \;+\; \ldots \;+\; \beta_k \vec{x}_k. \tag{IV.50}$$

Da $\vec{y}, \vec{z} \notin \operatorname{span}(M)$, wären $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$. Damit wäre

$$-\beta_1 \vec{y} \;+\; \alpha_1 \vec{z} \;+\; (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)\vec{x}_2 \;+\; \ldots \;+\; (\beta_1\alpha_k - \alpha_1\beta_k)\vec{x}_k \;=\; \vec{0}\,, \tag{IV.51}$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ folgte, dass alle Koeffizienten verschwinden und insbesondere auch $\beta_1 = \alpha_1 = 0$ gälte, was in Widerspruch zu $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$ stünde. Also enthält $\widetilde{S}$ genau ein Element. □

IV.5.2. Beweis der Dimensionsformel

Beweis. In dieser Ergänzung führen wir den Beweis von Satz IV.11, d.h. wir beweisen die Dimensionsformel (IV.43). Dazu können wir o.B.d.A. $\dim(Y), \dim(Y') < \infty$ annehmen. Dann sind auch

$$\dim(Y \cap Y') \;\leq\; \dim(Y) \;<\; \infty, \tag{IV.52}$$

$$\dim(Y + Y') \;\leq\; \dim\Big(\operatorname{span}\big(\{Y \cup Y'\}\big)\Big) \;\leq\; \dim(Y) + \dim(Y') \;<\; \infty. \tag{IV.53}$$

Sei nun $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ eine Basis von $Y \cap Y'$. Nach dem Ergänzungssatz IV.12 gibt es Vektoren $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m \in Y$ und $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n \in Y'$, so dass $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m\}$ eine Basis von Y und $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n\}$ eine Basis von Y' bilden. Offenbar ist dann auch

$$Y + Y' \;=\; \operatorname{span}\big\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r,\, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m,\, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n\big\}. \tag{IV.54}$$

Wir zeigen, dass diese Menge linear unabhängig ist. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$, sowie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{K}$, so dass

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{x}_r + \beta_1\vec{y}_1 + \ldots + \beta_m\vec{y}_m + \gamma_1\vec{z}_1 + \ldots + \gamma_n\vec{z}_n \;=\; 0, \tag{IV.55}$$

bzw.

$$\vec{w} \;:=\; -\big(\beta_1\vec{y}_1 + \ldots + \beta_m\vec{y}_m\big) \;=\; \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{x}_r + \gamma_1\vec{z}_1 + \ldots + \gamma_n\vec{z}_n. \tag{IV.56}$$

Aus der ersten Gleichung in (IV.56) folgt, dass $\vec{w} \in Y$, und aus der zweiten, dass $\vec{w} \in Y'$. Also ist $\vec{w} = -(\beta_1\vec{y}_1 + \ldots + \beta_m\vec{y}_m) \in Y \cap Y'$ und kann als Linearkombination der $\vec{x}_i$ dargestellt werden, d.h. es gibt $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r \in \mathbb{K}$, so dass

$$\beta_1\vec{y}_1 + \ldots + \beta_m\vec{y}_m + \tilde{\alpha}_1\vec{x}_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_r\vec{x}_r \;=\; 0. \tag{IV.57}$$

Da $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m,\ \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ eine Basis in Y ist, folgt daraus jedoch, dass $\tilde{\alpha}_1 = \cdots = \tilde{\alpha}_r = 0$ und insbesondere

$$\beta_1 \;=\; \beta_2 \;=\; \cdots \;=\; \beta_m \;=\; 0 \tag{IV.58}$$

sowie

$$\vec{0} \;=\; \vec{w} \;=\; \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{x}_r + \gamma_1\vec{z}_1 + \ldots + \gamma_n\vec{z}_n. \tag{IV.59}$$

Da aber $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n\}$ eine Basis von Y' bilden, folgt daraus, dass auch

$$\alpha_1 \;=\; \alpha_2 \;=\; \cdots \;=\; \alpha_r \;=\; \gamma_1 \;=\; \gamma_2 \;=\; \cdots \;=\; \gamma_n \;=\; 0. \tag{IV.60}$$

Also ist $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n\}$ eine Basis von $Y + Y'$, und (IV.43) ergibt sich nun durch Abzählen aus

$$\dim(Y \cap Y') \;=\; r, \qquad \dim(Y + Y') \;=\; r + m + n, \tag{IV.61}$$

$$\dim(Y) \;=\; r + m, \qquad \dim(Y') \;=\; r + n. \tag{IV.62}$$

□