III. Reelle und komplexe Zahlen

Die detaillierte Einführung der reellen und der komplexen Zahlen ist traditionell Gegenstand der Einführungsvorlesung der Analysis. Wir geben hier nur ein paar Eckpunkte wieder. Dabei setzen wir Begriffe wie *Ordnungsrelationen*, *totale Ordnung*, *Beschränktheit nach oben* (von Teilmengen einer total geordneten Menge) und *geordneter Körper* als bekannt voraus.

III.1. Reelle Zahlen

Definition III.1. Seien $S \neq \emptyset$ eine total geordnete Menge und $T \subseteq S$ eine nach oben beschränkte Teilmenge. Ein Element $b \in S$ heißt **Supremum von T** $:\Leftrightarrow$

$$(i) \qquad \forall t \in T : \qquad t \leq b, \tag{III.1}$$

$$(ii) \quad \forall a \in S,\ a < b\ \exists t \in T : \qquad a < t. \tag{III.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Besitzt eine Teilmenge $T \subseteq S$ einer total geordneten Menge S ein Supremum $b \in S$, so ist dieses eindeutig und wir schreiben

$$b \ =: \ \sup\big\{T\big\}, \tag{III.3}$$

  für *das* Supremum von T.

- Sind $S := \mathbb{Q}$ und $T := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$, so ist S total geordnet und T nach oben beschränkt - z.B. 2 ist eine obere Schranke. Es existiert jedoch kein Supremum von T in S: Man sieht nämlich leicht ein, dass $b^2 = 2$ für das Supremum $b = \sup\{T\} \in S = \mathbb{Q}$ gelten müsste, diese Gleichung jedoch keine rationale Lösung besitzt.

Definition III.2. Eine total geordnete Menge $S \neq \emptyset$ erfüllt das **Supremumsaxiom** oder **L.U.B.-Axiom**[1]

$:\Leftrightarrow$ Jede nach oben beschränkte Teilmenge $T \subseteq S$ besitzt ein Supremum, $\sup\{T\} \in S$.

[1] "L.U.B." steht für "**l**east **u**pper **b**ound". Solche einfallsreichen Namensgebungen werden uns noch häufiger begegnen.

Satz III.3. *Es gibt einen eindeutigen geordneten Körper, in dem $a + c < b + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{F}$ mit $a < b$ gilt, in dem $ab > 0$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt, der $\mathbb{Q}$ enthält und der das Supremumsaxiom erfüllt. Wir nennen diesen Körper die* ***reellen Zahlen*** *und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.*

III.2. Komplexe Zahlen

Mit Hilfe der Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ durch die reellen Zahlen $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ können wir also die Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{R}$ finden. Wenn wir hingegen die Lösungen der Gleichung $x^2 = -2$ suchen, werden wir erneut vor ein Problem gestellt: Da Quadrate reeller Zahlen stets positiv oder null sind, kann $x^2 = -2$ keine reelle Lösung haben. Die Frage nach einer abermaligen Erweiterung des Zahlenbereichs, um auch Lösungen von $x^2 = -2$ finden, führt uns von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Definition III.4. Auf der Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien Addition und Multiplikation durch

$$(a, b) + (c, d) \ := (a + c,\ b + d), \tag{III.4}$$

$$(a, b) \ \cdot \ (c, d) \ := (a \cdot c - b \cdot d,\ b \cdot c + a \cdot d), \tag{III.5}$$

definiert.

Satz III.5. *Die Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet bezüglich der Addition* (III.4) *und der Multiplikation* (III.5) *einen Körper, den Körper $\mathbb{C}$ der* ***komplexen Zahlen****. Dabei sind $(0, 0)$ das neutrale Element bezüglich Addition und $(1, 0)$ das neutrale Element bezüglich Multiplikation. Die inversen Elemente in $\mathbb{C}$ sind wie folgt gegeben,*

$$-(a, b) \ = (-a, -b), \tag{III.6}$$

$$\frac{1}{(a, b)} \ = \left(\frac{a}{a^2 + b^2},\ \frac{-b}{a^2 + b^2}\right), \tag{III.7}$$

wobei zu beachten ist, dass

$$\Big[(a, b) \neq (0, 0)\Big] \ \Leftrightarrow \ \Big[(a \neq 0 \vee b \neq 0)\Big] \ \Leftrightarrow \ \Big[a^2 + b^2 > 0\Big]. \tag{III.8}$$

Beweis. Der Beweis, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist, erfolgt durch Nachprüfen der Eigenschaften $(R_1) - (R_3)$ und $(K_1) - (K_3)$. □

Zu jeder komplexen Zahl $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ definieren wir

ihren **Realteil**	$\mathrm{Re}\{z\} \ := \ a \ \in \ \mathbb{R},$	(III.9)
ihren **Imaginärteil**	$\mathrm{Im}\{z\} \ := \ b \ \in \ \mathbb{R},$	(III.10)
ihren **Betrag**	$\lvert z\rvert \ := \ \sqrt{a^2 + b^2} \ \in \ \mathbb{R}_0^+,$	(III.11)
und die **konjugiert komplexe Zahl**	$\bar{z} \ := \ (a, -b) \ \in \ \mathbb{C}.$	(III.12)

Bemerkungen und Beispiele.

- Sind $w = (2,1)$ und $z = (-3,4)$, so sind

$$\mathrm{Re}\{w\} \,=\, 2,\ \mathrm{Im}\{w\} \,=\, 1\,, \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\{z\} \,=\, -3,\ \mathrm{Im}\{z\} \,=\, 4\,, \tag{III.13}$$

$$|w| \,=\, \sqrt{2^2+1^2} \,=\, \sqrt{5}\,, \quad \text{und} \quad |z| \,=\, \sqrt{(-3)^2+4^2} \,=\, \sqrt{25} \,=\, 5\,, \tag{III.14}$$

$$\overline{w} \,=\, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{z} \,=\, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{III.15}$$

- Weiterhin sind mit $w = (2,1)$ und $z = (-3,4)$ auch

$$w+z \,=\, (-1,5)\,, \qquad w-z \,=\, (5,-3)\,, \tag{III.16}$$

$$w \cdot z \,=(2\cdot(-3)-1\cdot 4\,,\ 2\cdot 4+1\cdot(-3)) \,=\, (-10,5)\,, \tag{III.17}$$

$$\frac{1}{z} \,=\, \left(\frac{-3}{3^2+4^2}\,,\,\frac{-4}{3^2+4^2}\right) \,=\, \left(\frac{-3}{25},\frac{-4}{25}\right) \quad \text{und} \tag{III.18}$$

$$\frac{w}{z} \,=w\cdot\frac{1}{z} \,=\, (2,1)\cdot\left(\frac{-3}{25},\frac{-4}{25}\right) \tag{III.19}$$

$$=\left(\frac{2\cdot(-3)-1\cdot(-4)}{25},\frac{1\cdot(-3)+2\cdot(-4)}{25}\right) \,=\, \left(-\frac{2}{25}\,,\,-\frac{11}{25}\right).$$

- Die Definition (III.5)

$$(a,b)\cdot(c,d) \,=\, (ac-bd\,,\,bc+ad) \tag{III.20}$$

des Produkts komplexer Zahlen wirkt auf den ersten Blick merkwürdig und unmotiviert. Tatsächlich ergibt sie sich jedoch zwingend aus den Körperaxiomen $(R_1)-(R_3)$ und $(K_1)-(K_3)$ und der zusätzlichen Forderung, dass

$$1\cdot z \,=\, z \quad \text{und} \quad |w\cdot z| \,=\, |w|\cdot|z| \tag{III.21}$$

gelten möge: Das Produkt (III.20) ist das einzige auf $\mathbb{R}^2$, mit dem $\mathbb{R}^2$ die Körperaxiome und (III.21) erfüllt.

III.2.1. Imaginäre Einheit i und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als Teilkörper

Es ist bequem, die sogenannte **imaginäre Einheit** $i := (0,1)$ einzuführen. Identifizieren wir weiterhin $\mathbb{1} := (1,0)$, so kann man jede komplexe Zahl $(a,b) \in \mathbb{C}$ als $(a,b) = a\cdot\mathbb{1}+b\cdot i$ schreiben. Damit ist

$$z \,=\, \mathrm{Re}\{z\}\cdot\mathbb{1} \,+\, \mathrm{Im}\{z\}\cdot i. \tag{III.22}$$

Weiterhin sind mit dieser Schreibweise (III.4) und (III.5) äquivalent zu

$$(a\cdot\mathbb{1}+b\cdot i) \,+\, (c\cdot\mathbb{1}+d\cdot i) \,=(a+c)\cdot\mathbb{1} \,+\, (b+d)\cdot i, \tag{III.23}$$

$$(a\cdot\mathbb{1}+b\cdot i) \,\cdot\, (c\cdot\mathbb{1}+d\cdot i) \,=(ac-bd)\cdot\mathbb{1} \,+\, (bc+ad)\cdot i. \tag{III.24}$$

Insbesondere ist

$$i^2 \;=\; (0,1)\cdot(0,1) \;=\; (-1,0) \;=\; -\mathbb{1}, \tag{III.25}$$

d.h. die imaginäre Einheit ist eine Quadratwurzel aus $-\mathbb{1}$. Das ist auch die einzige zusätzliche Rechenregel, die man beim Rechnen mit komplexen Zahlen im Vergleich zu den reellen beachten muss.

Eine sehr nützliche Beobachtung ist, dass die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil mit den reellen Zahlen identifiziert werden können. Dies rechtfertigt auch den Namen "Realteil" für die erste Komponente einer komplexen Zahl. Definieren wir

$$\mathrm{Re}\,\mathbb{C} \;:=\; \{(a,0) \;=\; a\cdot\mathbb{1}\in\mathbb{C} \mid a\in\mathbb{R}\}, \tag{III.26}$$

so sieht man leicht, dass $\mathrm{Re}\,\mathbb{C}\subseteq\mathbb{C}$ ein Teilkörper ist, d.h. $\mathrm{Re}\,\mathbb{C}\subseteq\mathbb{C}$ ist eine Teilmenge, die selbst ein Körper ist. Außerdem ist $\mathrm{Re}\,\mathbb{C}\subseteq\mathbb{C}$ *isomorph* (als Körper) zu $\mathbb{R}$. Etwas genauer formuliert, ist

$$J \;:\; \mathbb{R}\to\mathrm{Re}\,\mathbb{C},\quad a\mapsto a\cdot\mathbb{1} \tag{III.27}$$

eine Bijektion, die die Körpereigenschaften erhält, d.h. es gilt $J(a+b) = J(a)+J(b)$ und $J(a\cdot b) = J(a)\cdot J(b)$. Mit (III.27) können wir $\mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}\,\mathbb{C} = J[\mathbb{R}]$ miteinander identifizieren und die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen. Konkret geschieht diese Identifikation einfach durch das Weglassen von "$\mathbb{1}$", also indem wir $a+ib := a\cdot\mathbb{1}+b\cdot i$ schreiben und Einsen $\mathbb{1}$ als Faktoren auslassen. Mit dieser Identifikation wird dann auch

$$|z|^2 \;=\; \bar{z}\cdot z, \tag{III.28}$$

für jede komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}$, sowie

$$(a+ib) \;+\; (c+id) \;=(a+c) \;+\; i(b+d), \tag{III.29}$$

$$(a+ib) \;\cdot\; (c+id) \;=(ac-bd) \;+\; i(bc+ad). \tag{III.30}$$

III.2.2. Polardarstellung, Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Von großer Bedeutung ist die Polardarstellung für komplexe Zahlen. Für eine komplexe Zahl $z = a+ib\neq 0$, die nicht null ist, definieren wir einen Winkel $\varphi\in\mathbb{R}$ so, dass

$$\cos(\varphi) \;=\; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \;=\; \frac{\mathrm{Re}\{z\}}{|z|} \qquad\text{und}\qquad \sin(\varphi) \;=\; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \;=\; \frac{\mathrm{Im}\{z\}}{|z|}. \tag{III.31}$$

gelten. Mit diesem Winkel wird dann

$$z \;=\; |z|\,\big(\cos(\varphi) \;+\; i\,\sin(\varphi)\big). \tag{III.32}$$

Wegen der Periodizität $\cos(\varphi+2\pi) = \cos(\varphi)$ der Kosinusfunktion und der Periodizität $\sin(\varphi+2\pi) = \sin(\varphi)$ der Sinusfunktion ändert sich die Zahl z in (III.32) nicht, wenn

man 2π zu φ hinzuaddiert. Daher kann der Winkel φ stets zwischen 0 und 2π gewählt werden,

$$0 \;\leq\; \varphi \;<\; 2\pi, \tag{III.33}$$

und man bezeichnet φ in diesem Zusammenhang als **Argument** der Zahl z oder als eine **Phase**. Die oben genannte Periodizität ist auch in der (Gaußschen) Zahlenebene $\mathbb{C}$ klar erkennbar: Eine Addition von π zu φ bedeutet geometrisch ein Schwenken des zu z gehörigen Vektors genau um einen geschlossenen Kreis $360° = 2\pi$ um den Ursprung.

Ist nun $\tilde{z} = |\tilde{z}|\{\cos(\psi) + i\sin(\psi)\}$ eine weitere komplexe Zahl mit zugehöriger Phase $\psi \in \mathbb{R}$, so erhalten wir aus den *Additionstheoremen für Sinus und Kosinus*,

$$\cos(\alpha+\beta) \;=\; \cos(\alpha)\cos(\beta) \;-\; \sin(\alpha)\sin(\beta), \tag{III.34}$$

$$\sin(\alpha+\beta) \;=\; \sin(\alpha)\cos(\beta) \;+\; \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{III.35}$$

die für beliebige Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} z\cdot\tilde{z} \;&= |z|\cdot|\tilde{z}|\cdot\big\{\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi)\big\}\cdot\big\{\cos(\psi)+i\,\sin(\psi)\big\} \\ &= |z|\,|\tilde{z}|\,\big\{\big[\cos(\varphi)\cos(\psi) \;-\; \sin(\varphi)\sin(\psi)\big] \;+\; i\,\big[\sin(\varphi)\cos(\psi) \;+\; \cos(\varphi)\sin(\psi)\big]\big\} \\ &= |z|\,|\tilde{z}|\,\big\{\cos(\varphi+\psi) \;+\; i\,\sin(\varphi+\psi)\big\}. \end{aligned} \tag{III.36}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen erfolgt also durch Multiplikation ihrer Beträge und Addition der Phasen, und es gelten sogar

$$e^{i\varphi} \;=\; \cos(\varphi) \;+\; i\,\sin(\varphi) \quad\text{und}\quad z \;=\; |z|\cdot e^{i\varphi}, \tag{III.37}$$

sodass (III.36) nur das Potenzgesetz $e^x e^y = e^{x+y}$ widerspiegelt.

$$z\cdot\tilde{z} \;=\; \big(|z|\cdot e^{i\varphi}\big)\cdot\big(|\tilde{z}|\cdot e^{i\psi}\big) \;=\; |z|\cdot|\tilde{z}|\cdot\big(e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}\big) \;=\; |z|\cdot|\tilde{z}|\cdot e^{i(\varphi+\psi)}. \tag{III.38}$$

Glg. (III.37) lässt sich durch Entwicklungen der Exponential-, der Kosinus- und der Sinusfunktion in *Potenzreihen* mathematisch streng begründen – dies ist jedoch Gegenstand der Analysis und wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

Mit $r := |z|$ wird (III.37) zur **Polardarstellung**

$$z \;=\; r\cdot e^{i\varphi}. \tag{III.39}$$

der komplexen Zahl z. (Diese ist auch für $z = 0$ gültig, da in diesem Fall $r = 0$ ist und die Phase φ beliebig gewählt werden kann.)

Bemerkungen und Beispiele.

- In der Polardarstellung haben dann Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen jeweils folgende grafische Interpretation.
- Die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a + ib = (a,b)$ und $z_2 = c + id = (c,d)$ erfolgt komponentenweise, wie bei Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$,

$$z_1 + z_2 \;=\; (a,b) + (c,d) \;=\; (a+c,\; b+d) \;=\; (a+c) + i(b+d). \tag{III.40}$$

- Die Multiplikation zweier in Polardarstellung gegebener komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ erfolgt durch Multiplikation ihrer Beträge und Addition ihrer Phasen,

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (r_1\, e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2\, e^{i\varphi_2}) \;=\; r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{III.41}$$

- Die Division zweier in Polardarstellung gegebener komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2} \neq 0$ erfolgt durch Division ihrer Beträge und Subtraktion ihrer Phasen,

$$\frac{z_1}{z_2} \;=\; \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} \;=\; \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{III.42}$$

- Wir belegen die obigen Aussagen mit einem Zahlenbeispiel. Sind $w = 2 + i$ und $z = -3 - 4i$, so sind $w = |w| \cdot e^{i\alpha}$ und $z = |z| \cdot e^{i\beta}$ mit

$$|w| \;=\; \sqrt{5}, \quad \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 0,46 \;\Rightarrow w \;\approx\; \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(0,46)}\ , \tag{III.43}$$

$$|z| \;=\; 5, \quad \cos(\beta) = \frac{-3}{5},\ \sin(\beta) = \frac{-4}{5} \;\Rightarrow\; \beta \approx 4,07 \;\Rightarrow z \;\approx\; 5 \cdot e^{i\cdot(2,21)}. \tag{III.44}$$

  Andererseits können wir direkt ausrechnen, dass $w \cdot z = |w \cdot z| \cdot e^{i\gamma}$ mit

$$w \cdot z \;=\; -2 - 11i, \tag{III.45}$$

$$|w \cdot z| \;=\; \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} \;=\; \sqrt{125} \;=\; 5 \cdot \sqrt{5}, \tag{III.46}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{-2}{\sqrt{125}}, \quad \sin(\gamma) = \frac{-11}{\sqrt{125}} \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 4,53 \tag{III.47}$$

$$\Rightarrow \quad w \cdot z \;\approx\; \sqrt{125} \cdot e^{i\cdot(4,53)} \;=\; \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot(0,46)} \cdot 5 \cdot e^{i\cdot(4,07)}. \tag{III.48}$$

Die wahre Stärke der Polardarstellung $z = r \cdot e^{i\varphi}$ einer komplexen Zahl z liegt in der Vereinfachung der Berechnung von Potenzen z^n und Wurzeln $\sqrt[n]{z}$ von z. Für eine nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist nämlich nach (III.41)

$$z^n \;=\; \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n \;=\; r^n \cdot \left(e^{i\varphi}\right)^n \;=\; r^n \cdot e^{in\cdot\varphi}, \tag{III.49}$$

und für $z \neq 0$ gilt dies auch für negative n, also für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen und Beispiele.
Sind etwa $z = 3 + 4i$ und $n = 4$, so kann man ausmultiplizieren und erhält

$$z^4 \;= (3+4i)^4 \;=\; \left((3+4i)^2\right)^2 \;=\; \left(3^2 + 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2\right)^2 \;=\; \left(9 + 24i - 16\right)^2 \tag{III.50}$$

$$= (-7+24i)^2 \;=\; (-7)^2 + 2\cdot(-7)\cdot 24i + (24i)^2 \;=\; 49 - 336i - 576 \;=\; -527 - 336i$$

durch mühsame Rechnung. Schreibt man aber z in Polardarstellung, $z \approx 5 \cdot e^{i\cdot 0{,}927}$, so erhält man mit (III.41) ganz einfach

$$z^4 \;\approx\; \left(5 \cdot e^{i\cdot 0{,}927}\right)^4 \;=\; 5^4 \cdot \left(e^{i\cdot 0{,}927}\right)^4 \;=\; 5^4 \cdot e^{i\cdot 4\cdot 0{,}927} \;=\; 625 \cdot e^{i\cdot 3{,}71}. \tag{III.51}$$

Um die Übereinstimmung der Ergebnisse zu überprüfen, beobachtet man, dass $\cos(3,71) \approx -0,843$ und $\sin(3,71) \approx -0,538$ sind und daher

$$\begin{aligned} 625 \cdot e^{i\cdot 3{,}71} &= 625 \cdot \cos(3,71) + 625 \cdot \sin(3,71)i \;\approx\; 625 \cdot (-0,843) + i\,625 \cdot (-0,538) \\ &= -526,875 - (336,25)i \;\approx\; -527 - 336i \end{aligned} \tag{III.52}$$

gilt, wobei die Fehler nur durch das Runden von Sinus und Kosinus auf zwei signifikante Stellen hinter dem Komma entstehen – und nicht durch falsche Rechnung.

Auch das Wurzelziehen ist bei komplexen Zahlen leicht und funktioniert vor allem immer. Ist $z = r \cdot e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl mit $r > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$, so sind die Quadratwurzeln von z alle komplexen Zahlen w, für die $w^2 = z$ gilt. In Polardarstellung $w = s \cdot e^{i\alpha}$ muss also

$$s^2 \cdot e^{i2\alpha} \;=\; r \cdot e^{i\varphi} \tag{III.53}$$

gelten, wobei $s \ge 0$ und $0 \le \alpha < 2\pi$. Somit ist $s = \sqrt{r} > 0$, und es muss $e^{i2\alpha} = e^{i\varphi}$ gelten. Letztere Gleichung hat zwei Lösungen im Intervall $[0, 2\pi)$, nämlich

$$\alpha_1 \;=\; \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 \;=\; \frac{\varphi}{2} + \pi, \tag{III.54}$$

da $e^{2\pi i} = 1$. Außerdem ist $e^{\pi i} = -1$, und wir erhalten $z = w_1^2 = w_2^2$ mit

$$w_1 \;=\; \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} \quad \text{und} \quad w_2 \;=\; \sqrt{r} \cdot e^{i(\pi+\varphi/2)} \;=\; \sqrt{r} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\varphi/2} \;=\; -\sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} \;=\; -w_1, \tag{III.55}$$

wie gewohnt.

Auch das Ziehen der allgemeinen n. Wurzel ist nicht schwer: Sind $z = r \cdot e^{i\varphi} \neq 0$ eine komplexe und $n \ge 2$ eine natürliche Zahl, wobei wir abermals $r > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$ annehmen können, so sind die n. Wurzeln von z alle komplexen Zahlen w, für die $w^n = z$ gilt. In Polardarstellung $w = s \cdot e^{i\alpha}$ mit $s \ge 0$ und $0 \le \alpha < 2\pi$ muss also wieder $s^n \cdot e^{in\alpha} = r \cdot e^{i\varphi}$ gelten, was auf $s = \sqrt[n]{r} = r^{1/n} > 0$ und

$$e^{in\alpha} \;=\; e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i(n\alpha-\varphi)} \;=\; 1 \tag{III.56}$$

führt. Daher muss $n\alpha - \varphi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, und die möglichen Lösungen haben die Gestalt

$$\alpha_k \;=\; \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}, \tag{III.57}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist. Da wir außerdem $0 \le \alpha_k < 2\pi$ fordern, gibt es für α genau n Lösungen, nämlich

$$\alpha_1 \;=\; \frac{\varphi}{n},\; \alpha_2 \;=\; \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n},\; \ldots,\; \alpha_n \;=\; \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}. \tag{III.58}$$

Daher besitzt z genau die n. Wurzeln

$$w_1 \;=\; \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}, \quad w_2 \;=\; \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}+\frac{2\pi i}{n}}, \quad \ldots \quad , \quad w_n \;=\; \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}+\frac{2\pi i(n-1)}{n}}. \tag{III.59}$$

Die obigen Überlegungen zeigen, dass eine komplexe Zahl $z \neq 0$ stets n (voneinander verschiedene) n. Wurzeln besitzt – im Gegensatz zu den reellen Zahlen, in denen etwa -1 keine reelle Quadratwurzel besitzt (sondern nur die komplexen Wurzeln $\pm i$, wobei wir dann aber schon wieder -1 als komplexe Zahl mit Imaginärteil null betrachten). Diese bemerkenswerte Eigenschaft der komplexen Zahlen führt letztendlich dazu, dass jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Genauer gilt der folgende Satz.

Satz III.6 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und p das Polynom*

$$p(z) \;:=\; z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0. \tag{III.60}$$

Dann gibt es komplexe Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) \;=\; (z-\lambda_1)\cdot(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n) \tag{III.61}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind die (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Nullstellen des Polynoms p.

Bemerkungen und Beispiele.

- Das *reelle* Polynom $p(x) = x^2 + 1$ besitzt keine *reellen* Nullstellen und lässt sich nicht in der Form $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zerlegen. Der Fundamentalsatz der Algebra ist für reelle Zahlen also falsch.
- Das *komplexe* Polynom $p(z) = z^2 + 1$ (mit $1 = 1 + 0 \cdot i$ als komplexe Zahl) besitzt die *komplexen* Nullstellen $\pm i$ und zerfällt zu $p(z) = (z-i)(z+i)$ in Linearfaktoren, wie es der Fundamentalsatz der Algebra behauptet.
- Der Fundamentalsatz der Algebra, Satz III.6, sichert zwar für jedes Polynom $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$ vom Grad n die Existenz von n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, beinhaltet aber keine Lösungsformel oder ein anderes Verfahren zu ihrer Bestimmung.
- Für Grad $n = 1$ ist $p(z) = z + c_0$, und offensichtlich gilt die Lösungsformel $\lambda_1 = -c_0$.
- Für Grad $n = 2$ ist $p(z) = z^2 + c_1 z + c_0$, und λ_1 und λ_2 können mit Hilfe der p-q-Formel bestimmt werden, $\lambda_1 = -\frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$ und $\lambda_2 = -\frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$.
- Für Grad $n = 3, 4$ gibt es gibt es allgemeine Lösungsformeln für die Nullstellen. Sie sind jedoch zu kompliziert um wirklich nützlich zu sein.
- $n \geq 5$: Vor etwa zweihundert Jahren haben die zwei (leider jung verstorbenen) Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) und Evariste Galois (1811-1832) die bemerkenswerte Tatsache bewiesen, dass es Lösungsformeln für die Bestimmung der Nullstellen von Polynomen vom Grad $n \geq 5$ *prinzipiell nicht geben kann!* Dies werden wir hier nicht behandeln, sondern ist Gegenstand einer Vorlesung über *Galoistheorie*.