

Einführung zur Vorlesung

Lineare Algebra für Elektrotechnik

Prof. Dr. Volker Bach

Technische Universität Braunschweig  
Wintersemester 2026/27

# Vorwort

In diesen Tagen besuchen Sie die ersten Vorlesungen Ihres Studierendenlebens. Ich hoffe, dass Ihnen die kommenden Wochen in positiver Erinnerung bleiben. Vielleicht machen Sie – wie auch ich bei meinem Studienbeginn vor vielen Jahren – folgende Erfahrungen:

- Die Lehrveranstaltungen an der Universität sind grundsätzlich verschieden vom Schulunterricht: Vorlesungen sind Frontalunterricht, und nur in den Übungen haben Sie die Gelegenheit, aktiv am Unterricht teilzunehmen.
- Das Material, das in der Vorlesung abgedeckt wird, ist ein *Vielfaches* dessen, was in derselben Zeit im Schulunterricht behandelt wird.
- Der Abstraktionsgrad ist ebenfalls viel größer als in der Schule.
- Sie sind für alles, was Sie lernen oder nicht lernen selbst verantwortlich. Das gibt Ihnen eine völlig neue Freiheit, aber es erfordert auch ein hohes Maß an Selbstdisziplin.
- Sie haben das Gefühl, noch nie soviel neue, interessante Dinge in so kurzer Zeit gelernt zu haben. Es eröffnet sich geradezu eine neue, bisher unbekannte Welt für Sie.

Ich möchte Ihnen deshalb ein paar persönliche Ratschläge mit auf den Weg geben:

- Ihr Zeitaufwand für die (4+2+2)-stündige Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* ist enorm, wenn Sie den Anspruch haben, auch wirklich zu verstehen, was Sie lernen. Sollten Sie merken, dass Sie den Aufwand aller Ihrer Veranstaltungen nicht mehr schaffen, dann empfehle ich Ihnen, lieber Vorlesungen aus ihrem Stundenplan zu streichen, als viele Dinge nur oberflächlich zu machen.
- Suchen Sie sich Kommilitonen/innen, mit denen Sie gemeinsam Übungsaufgaben und deren Lösungen vor deren Abgabe besprechen.
- Erklären Sie sich gegenseitig den Vorlesungsstoff – nur das, was Sie jemandem überzeugend erklären können, haben Sie selbst auch gut verstanden.
- Kommen Sie zur Vorlesung statt zu “schwänzen” und sich darauf zu verlassen, in den Semesterferien alles nacharbeiten zu können.
- Kaufen Sie kein Buch ohne nicht vorher damit gearbeitet zu haben, denn Buchauswahl ist Geschmacksache – auch bei Mathematikbüchern. Deshalb möchte ich eigentlich keine konkreten Lehrbücher nennen. Da ich aber ohnehin danach gefragt werde, nenne ich drei:
  - Ansorge, Oberle, Rothe, Sonar: *Mathematik für Ingenieure 1+2* (Wiley),
  - Riessenberger: *Mathematik für Ingenieure* (Springer),
  - Wüst: *Mathematik für Physiker 1+2* (de Gruyter),
- Trauen Sie sich ruhig, in Vorlesungen und Übungen dazwischenzufragen, wenn Sie etwas nicht verstehen. Meistens sind Sie nicht allein, und die anderen sind dankbar für Ihre klärende Frage.
- Versuchen Sie herauszufinden, ob Sie durch das Schreibtempo in der Vorlesung “abgehängt” werden. Falls ja, kopieren Sie sich eine Mitschrift eines Kommilitonen

---

oder wechseln Sie sich mit dem Schreiben ab. Kommen Sie aber auf jeden Fall zur Vorlesung!

- Der Erfolg Ihres Studiums hängt in entscheidender Weise von Ihrer Begeisterung für das von Ihnen gewählte Fach ab – unabhängig vom Fach. Bewahren Sie sich diese Begeisterung und versuchen Sie sich auf die Faszination einzulassen, die von den in der Lehre behandelten Inhalten ausgeht, statt auf ein maximal ökonomisches Studium (= viele gute Noten mit minimalem Aufwand) zu zielen!

---

## Vorwissen aus der Schule

Es ist eine immer wieder beklagte Tatsache, dass nicht alle Studienanfänger der MINT-Fächer dasselbe oder auch nur ein vergleichbares mathematisches Vorwissen besitzen. Defizite entstehen einerseits durch individuelle Lernschwächen und Abwählen von Mathematik als Schulfach, aber auch durch eigenwillige Interpretationen des Lehrplans. Es stellt sich daher die Frage, welche mathematischen Vorkenntnisse ich Ihnen in der Lehrveranstaltung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* verbindlich unterstelle. Selbstverständlich lautet die korrekte Antwort auf diese Frage, dass ich von der Beherrschung aller im Lehrplan bis zum Abitur vorgesehen Inhalte ausgehe. Diese Antwort hat für Sie vermutlich nur einen sehr begrenzten praktischen Nutzen.

Einen konkreten Mindestanforderungskatalog, den die Baden-Württembergische *COSH*-Gruppe formuliert hat, findet man zum Herunterladen unter

<https://cosh-mathe.de/materialien/>

Dort finden Sie auch einen Hinweis auf das Buch

***So viel Mathe muss sein!***,

das Mitglieder der *COSH*-Gruppe verfasst haben und in dem sie die im Mindestanforderungskatalog genannten mathematischen Inhalte zur Vorbereitung auf ein WiMINT-Studium detailliert darlegen.

Einen umfangreicheren Katalog des gewünschten Vorwissens bietet das Buch *Schulwissen Mathematik* von Winfried Scharlau (Vieweg Verlag, 3. Auflage, 2001).

Weiterhin empfehle ich Ihnen den **Online-Mathematik-Brückenkurs @ TU Braunschweig**, zu dem Sie sich unter

<https://www.ombplus.de/>

anmelden können. Wenn Sie den Kurs erfolgreich absolvieren und das zugehörige Zertifikat **bis zum 31.12.2022** per E-Mail an [v.bach@tu-bs.de](mailto:v.bach@tu-bs.de) senden, werden Ihnen **48 zusätzliche Hausaufgabenpunkte** gutgeschrieben! (Dies entspricht der Punktzahl zweier Hausaufgabenblätter.)

---

Hier gebe ich Ihnen zusätzlich eine (unvollständige) Liste mathematischer Gegenstände, deren sichere Beherrschung von Ihnen erwartet wird:

- **Zahlenbegriffe** der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , ganze Zahlen  $\mathbb{Z}$ , rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$ , irrationale Zahlen, wie  $\sqrt{2}$ , und reelle Zahlen  $\mathbb{R}$ .
- **Elementare Umformungen** von Gleichungen: Wenn man auf beide Seiten einer Gleichung dieselbe Operation durchführt, erhält man wieder eine Gleichung. Aber Vorsicht! Obwohl diese Umformungen in der Schule häufig als “Äquivalenzumformungen” bezeichnet werden, ist die neue Gleichung nicht immer äquivalent zur alten. Beispielsweise erhält man  $a \cdot b = 0$  aus  $a = 0$ , aber  $a = 0$  folgt aus  $a \cdot b = 0$  nur, wenn man außerdem weiß, dass  $b \neq 0$ .
- **Auflösen von Gleichungen**, wie zum Beispiel

$$y = \frac{3x + 4}{5x + 6} \quad \text{oder} \quad y = \frac{3x^2 + 4x + 5}{5x^2 + 6x + 7},$$

nach  $x$  (durch elementare Umformungen). Dazu muss man manchmal Fallunterscheidungen machen, was für Schüler:innen ungewohnt ist.

- Die **p-q-Formel** für quadratische Gleichungen.
- Die **binomischen Formeln**.
- **Geometrische Grundbegriffe**:
  - Die **Flächeninhalte** von Kreis, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck.
  - Die **Volumina** von Kugel, Quader, Zylinder, Prisma.
  - Den **Satz von Pythagoras**.
  - **Vektorrechnung**, Geradengleichungen in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , Ebenengleichungen in  $\mathbb{R}^3$ .
- **Elementare Funktionen**:
  - Die **trigonometrischen Funktionen**  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$ , ihre Umkehrfunktionen  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccot}$ . (Auch die Graphen dieser Funktionen!)
  - Die **Exponentialfunktion**  $e^x = \exp[x]$  und der **Logarithmus**  $\ln[x]$ . (Auch die Graphen dieser Funktionen!)
- Die **Stetigkeit** einer Funktion.
- Die **Ableitung** einer Funktion, ihre Interpretation als Steigung der Tangente, Anwendung auf Minimierungs- und Maximierungsaufgaben, Kurvendiskussion.
- Das **Integral** einer Funktion, seine Interpretation als Fläche unter der Kurve, den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

In der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* werden viele dieser Begriffe -etwa die Differenzial-, Integral- und Vektorrechnung- neu und gründlich aufgebaut. Man sollte sich aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass dieser Aufbau ohne ein Grundverständnis dieser Dinge misslingt.

# I. Grundlagen, Konventionen und Notationen

Dieses Kapitel stellt eine Übersicht über in der Mathematik häufig gebrauchte Begriffe, Konventionen und Notationen dar. Der Inhalt dieses Kapitels wird den Leser(inne)n größtenteils aus dem Schulunterricht geläufig sein. Die wenigen neu hinzukommenden Begriffe sind so leicht zu lernen, dass es den Leser(inne)n überlassen ist, sich im Laufe der ersten Woche diese anzueignen. In der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* wird dieses Kapitel nur schlaglichtartig beleuchtet und wir<sup>1</sup> werden seinen Inhalt ohne weitere Erklärung benutzen.

## I.1. Quantoren und Logik

- Eine Aussage im mathematischen Sinne ist ein Wortgebilde, dem man entweder den Wert wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) zuordnen kann.
  - „*Es regnet jetzt*“, „*Braunschweig ist die schönste Stadt Deutschlands*“ oder „ $1 \cdot 1 = 4$ “ sind jeweils Aussagen,
  - „*Grün*“, „*Fünfzehn Mann auf des toten Mannes Kiste -Johoo, johoo, johoo- und 'ne Buddel mit Rum!*“ oder „ $15x + 7y$ “ sind jeweils keine Aussagen.

Dabei geht es nur um die prinzipielle Zuordnung von  $w$  und  $f$  und weder um die praktische Nachprüfbarkeit der Aussage als Fakt noch um deren Objektivität noch um die Frage, ob sie eine Wertung beinhaltet.

- Das Zeichen  $=$  bedeutet Gleichheit und ist in seiner Bedeutung evident. Das Zeichen  $:=$  bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird, das Zeichen  $\equiv$  bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte (im Sinn einer Namensgebung) abgekürzt wird.

Beispiel:

$$a := f(0), \quad f(1) \equiv b. \tag{I.1}$$

bedeutet

$$a \text{ wird als Wert der Funktion } f \text{ bei } 0 \text{ definiert, der Wert der Funktion } f \text{ bei } 1 \text{ wird hingegen mit } b \text{ bezeichnet.} \tag{I.2}$$

- Das Zeichen  $\forall$  bedeutet **für alle** (umgedrehtes A wie Alle).

---

<sup>1</sup>In mathematischen Texten wird meistens die 1. Person Plural verwendet – selbst wenn es sich nur um einen Autor handelt.

Beispiel:

$$\forall x, y > 0 : \quad x \cdot y > 0 \quad (I.3)$$

bedeutet

$$\text{Für alle } x > 0 \text{ und } y > 0 \text{ gilt } x \cdot y > 0. \quad (I.4)$$

- Das Zeichen  $\exists$  bedeutet **es existiert** (umgedrehtes E wie Eexistiert).

Beispiel:

$$\forall x > 0 \exists y < 0 : \quad x + y = 0 \quad (I.5)$$

bedeutet

$$\text{Für jedes } x \text{ größer Null existiert ein } y \text{ kleiner Null, so dass } x + y = 0 \text{ gilt. (Das gesuchte } y \text{ ist natürlich } -x.) \quad (I.6)$$

- Man beachte, dass Quantoren im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen. Dazu betrachten wir folgende Beispiele:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

bedeutet

$$\text{Zu jeder natürlichen Zahl } n \text{ gibt es eine natürliche Zahl } m \text{ so, dass } m \text{ größer als } n \text{ ist. (Diese Aussage ist wahr).} \quad (I.7)$$

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \quad m > n$$

bedeutet

$$\text{Es gibt eine natürliche Zahl } m, \text{ so dass alle natürlichen Zahlen } n \text{ kleiner sind als } m. \text{ (Diese Aussage ist falsch).} \quad (I.8)$$

- Das Zeichen  $\Rightarrow$  bedeutet **impliziert**.

Beispiel:

$$A \Rightarrow B \quad (I.9)$$

bedeutet

$$\text{Aussage } A \text{ impliziert Aussage } B, \text{ d.h.: Ist } A \text{ wahr, so ist auch } B \text{ wahr.} \quad (I.10)$$

- Wie oben gesagt, kann eine mathematische Aussage  $A$  ein Satz, eine Bedingung oder auch eine Behauptung sein. In jedem Fall ist sie aber wahr oder falsch,  $A \in \{w, f\}$ .

Beispiel:

$$A := \text{Es regnet.}, \quad B := \text{Die Erde wird nass.} \quad (I.11)$$

Dann gilt die Implikation  $A \Rightarrow B$ , was gelesen werden muss als

$$(A = w) \Rightarrow (B = w).$$

Dieses Beispiel wirkt etwas künstlich. Darum geben wir ein weiteres Beispiel, in dem die Aussagen von Platzhaltern abhängen:

$$A(x) := \begin{cases} w, & \text{falls } x \geq 5, \\ f, & \text{falls } x < 5, \end{cases} \quad B(y) := \begin{cases} w, & \text{falls } y \geq 7, \\ f, & \text{falls } y < 7, \end{cases} \quad C(z) := \begin{cases} w, & \text{falls } z \geq 33, \\ f, & \text{falls } z < 33, \end{cases}$$

dann gilt die folgende Implikation (s. (I.18)–(I.19)):

$$A(x) \wedge B(y) \Rightarrow C(x \cdot y). \quad (\text{I.12})$$

- Das Zeichen  $\iff$  bedeutet **ist gleichwertig mit** oder **ist äquivalent zu**, d.h.

$$A \iff B \quad (\text{I.13})$$

bedeutet

$$A \text{ ist genau dann wahr, wenn } B \text{ wahr ist.} \quad (\text{I.14})$$

- Das Zeichen  $\vee$  ist ein logisches **oder**, d.h.

$$A \vee B \quad (\text{I.15})$$

$$\begin{aligned} &\text{ist wahr, falls } A \text{ oder } B \text{ oder beide wahr sind und falsch,} \\ &\text{falls } A \text{ und (gleichzeitig auch) } B \text{ falsch sind.} \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Beispiel:

$$\{x \cdot y = 0\} \iff \{(x = 0) \vee (y = 0)\}. \quad (\text{I.17})$$

- Das Zeichen  $\wedge$  ist ein logisches **und**, d.h.

$$A \wedge B \quad (\text{I.18})$$

$$\begin{aligned} &\text{ist wahr, falls } A \text{ und (gleichzeitig auch) } B \text{ wahr sind und} \\ &\text{sonst falsch.} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Beispiel 1:

$$\{(x = 0) \wedge (y = 0)\} \Rightarrow \{x + y = 0\}. \quad (\text{I.20})$$

Beispiel 2:

$$A \iff B \text{ ist gleichwertig mit } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \quad (\text{I.21})$$

d.h. (um die Verwirrung komplett zu machen)

$$(A \iff B) \iff [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]. \quad (\text{I.22})$$

- Die logische **Negation** wird mit  $\neg$  bezeichnet, also

$$\neg A \quad (\text{I.23})$$

$$\text{ist wahr, falls } A \text{ falsch ist und falsch, falls } A \text{ wahr ist.} \quad (\text{I.24})$$

- Eine wichtige Beobachtung ist die *Kontraposition*, d.h. dass

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A). \quad (\text{I.25})$$

Dies versteht man intuitiv sofort an folgendem Beispiel:

*Es regnet.  $\Rightarrow$  Die Erde wird nass.*

ist gleichwertig mit

$$\text{Die Erde ist nicht nass.} \Rightarrow \text{Es regnet nicht.} \quad (\text{I.26})$$

- Es ist nützlich, sich die Werte der Aussagen  $A$ ,  $B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \wedge B$  und  $\neg A$ , in einer Wertetabelle zu verdeutlichen:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $\neg A$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------------|------------|--------------|----------|
| $w$ | $w$ | $w$               | $w$                   | $w$        | $w$          | $f$      |
| $w$ | $f$ | $f$               | $f$                   | $w$        | $f$          | $f$      |
| $f$ | $w$ | $w$               | $f$                   | $w$        | $f$          | $w$      |
| $f$ | $f$ | $w$               | $w$                   | $f$        | $f$          | $w$      |

(I.27)

Wir sehen, dass  $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow \neg[A \vee (\neg B)] \Leftrightarrow [\neg(A \wedge (\neg B))]$  gilt, da die Werte von  $A \Rightarrow B$  und  $\neg[A \vee (\neg B)]$  für alle vier möglichen Werte des Paares  $(A, B) \in \{(w, w), (w, f), (f, w), (f, f)\}$  übereinstimmen.

- Für logische Verknüpfungen gelten

**das Kommutativgesetz:** (I.28)

$$\begin{aligned} A \vee B &= B \vee A, \\ A \wedge B &= B \wedge A, \end{aligned}$$

**das Assoziativgesetz:** (I.29)

$$\begin{aligned} A \vee (B \vee C) &= (A \vee B) \vee C, \\ A \wedge (B \wedge C) &= (A \wedge B) \wedge C, \end{aligned}$$

**das Distributivgesetz:** (I.30)

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C), \\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \end{aligned}$$

**sowie:** (I.31)

$$\begin{aligned} \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B), \\ \neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B). \end{aligned}$$

## I.2. Mengen

**Mengen** sind (endliche, abzählbare oder sogar überabzählbare) Sammlungen mathematischer Objekte.

- $\{1, 5, 9\}$  ist die Menge, die die Zahlen 1, 5 und 9 enthält,
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$  enthält alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 5 sind (also  $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ).
- Jedes Element einer Menge wird nur einmal aufgeführt, beispielsweise ist  $\{1, 5, 9, 9, 5\} = \{1, 5, 9\}$ .
- $x \in M$  heißt  $x$  **ist Element der Menge**  $M$ .
- $x \notin M$  heißt  $x$  **ist nicht in der Menge**  $M$  **enthalten**.
- Die **Anzahl der Elemente** einer Menge  $M$  wird mit  $|M|$  oder auch  $\#M$  bezeichnet. Beispielsweise ist  $|\{1, 5, 9\}| = 3$ .
- $A \subseteq B$  bedeutet, dass die Menge  $A$  in der Menge  $B$  enthalten ist, also dass  $A$  **Teilmenge** von  $B$  ist. Umgekehrt heißt  $A \supseteq B$ , dass die Menge  $A$  die Menge  $B$  enthält:

$$(A \subseteq B) \iff (B \supseteq A) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B). \quad (\text{I.32})$$

- $\emptyset = \{ \}$  ist die leere Menge, die kein Element enthält.
- Gleichheit von Mengen bedeutet elementweise Übereinstimmung,

$$(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B). \quad (\text{I.33})$$

- $\{x \mid E(x)\}$  und  $\{x\}_{E(x)}$  bezeichnen die *Menge aller  $x$ , die die Eigenschaft  $E(x)$  besitzen*.

Beispiel:

$$U := \{n \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\} \quad (\text{I.34})$$

ist

$$\text{die Menge aller } n, \text{ für die es eine natürliche Zahl } k \text{ gibt, so dass } n = 2k - 1 \text{ gilt}, \quad (\text{I.35})$$

d.h.

$$U = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N} - 1 \quad (\text{I.36})$$

ist die Menge aller ungeraden Zahlen.

Die Eigenschaft  $E(x)$  kann auch durch eine **Indexmenge**  $\mathcal{I}$  charakterisiert sein. Beispiel: Mit  $\mathcal{I} := \{1, 3, 5, 7\}$  ist

$$\{x_i \mid i \in \mathcal{I}\} = \{x_i\}_{i \in \mathcal{I}} = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}. \quad (\text{I.37})$$

- Haben wir mehrere Mengen, etwa  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$ , so bildet  $M = \{A_1, A_2, A_3\}$  wieder eine Menge – eine Menge von Mengen. Dies kann man so fortsetzen und kommt zu Mengen von Mengen von Mengen u.s.w. Der Übersichtlichkeit halber hat sich deshalb im Sprachgebrauch bewährt, die übergeordnete Menge  $M$  als **Familie**, **System**, **Kollektion** oder auch **Klasse** zu bezeichnen. Somit ist  $M$  *die Familie der Mengen  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$* .

- Die Familie aller Teilmengen einer Menge  $M$  bezeichnet man als ihre **Potenzmenge**  $\mathfrak{P}(M)$ . Dabei zählen auch die leere Menge  $\emptyset$  und  $M$  selbst als Teilmenge von  $M$ . Für  $|M| < \infty$  ist  $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$ . (Warum?)

Beispiel:

$$M := \{1, 2, 3\} \Rightarrow \mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \quad (\text{I.38})$$

- Die **Vereinigung**, der **Durchschnitt** und die **Differenz** zweier Mengen  $A, B$  werden wie folgt bezeichnet:

$$\text{Vereinigung:} \quad A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \quad (\text{I.39})$$

$$\text{Durchschnitt:} \quad A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \quad (\text{I.40})$$

$$\text{Differenz:} \quad A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \quad (\text{I.41})$$

- Ist  $A$  eine Teilmenge einer **Obermenge**  $M$ , d.h.  $A \subseteq M$ , so bezeichnet

$$A^c := M \setminus A \quad (\text{I.42})$$

das **Komplement von  $A$  bezüglich  $M$** . (Vorsicht, der Notation  $A^c$  für das Komplement sieht man die Grundmenge  $M$ , auf die sie sich bezieht nicht mehr an!)

Beispiel: Seien  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ ,  $M = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Dann sind

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad (\text{I.43})$$

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \quad A^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \quad (\text{I.44})$$

- Vereinigungen und Durchschnitte können auch über Familien  $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  von Mengen  $A_i$  gebildet werden, wobei  $i$  eine Indexmenge  $\mathcal{I}$  durchläuft.

Beispiel:

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \mid \exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i\}, \quad (\text{I.45})$$

ist

$$\text{die Vereinigung der Mengen } A_i, \text{ d.h. die } x, \text{ die in (mindestens) einer Menge } A_i \text{ mit } i \in \mathcal{I} \text{ enthalten sind;} \quad (\text{I.46})$$

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \mid \forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i\}, \quad (\text{I.47})$$

ist

$$\text{der Durchschnitt der Mengen } A_i, \text{ d.h. die } x, \text{ die in allen Mengen } A_i \text{ mit } i \in \mathcal{I} \text{ enthalten sind.} \quad (\text{I.48})$$

- Für Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung von Mengen gelten Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributionsgesetze, analog zu den entsprechenden Gesetzen für die logischen Verknüpfungen  $\vee$ ,  $\wedge$  und  $\neg$ .

- Sind  $A$  und  $B$  zwei nichtleere Mengen, so bezeichnet

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad (\text{I.49})$$

**das kartesische Produkt von  $A$  und  $B$** , d.h. die Menge aller Paare  $(a, b)$ , die sich mit Elementen  $a$  aus  $A$  und  $b$  aus  $B$  bilden lässt. (I.50)

Allgemeiner ist

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \quad (\text{I.51})$$

*das ( $n$ -fache) kartesische Produkt der Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , d.h. die Menge aller  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , die sich mit Elementen  $a_i$  aus  $A_i$ , für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  bilden lässt.* (I.52)

Vorsicht! Oft wird  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$  mit  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$  verwechselt. Der Unterschied wird aber schon deutlich, wenn man die Zahl der Elemente für  $A := A_1 = A_2$  betrachtet:

$$|A \times A| = |A|^2, \quad (\text{I.53})$$

$$|A \cup A| = |A|. \quad (\text{I.54})$$

- Sind  $a_1, a_2, a_3, \dots$  Zahlen, so bezeichnen wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als **Zahlenfolge**. Man beachte auch hier den Unterschied zwischen dem Tupel  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und der Menge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . So ist beispielsweise für die Zahlenfolge  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$ , die konstant gleich eins ist,

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots), \quad (\text{I.55})$$

aber

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \dots\} = \{1\}. \quad (\text{I.56})$$

- Häufig wiederkehrende Mengen haben in der Mathematik eine eigene Bezeichnung bekommen. Wir listen die Symbole für die wichtigsten Zahlenmengen auf:

$$\text{die natürlichen Zahlen: } \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (\text{I.57})$$

$$\text{die natürlichen Zahlen mit Null: } \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad (\text{I.58})$$

$$\text{die ganzen Zahlen: } \mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}, \quad (\text{I.59})$$

$$\text{die rationalen Zahlen: } \mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}, \quad (\text{I.60})$$

$$\text{die reellen Zahlen: } \mathbb{R} \quad (\text{I.61})$$

$$\text{die komplexen Zahlen: } \mathbb{C} \quad (\text{I.62})$$

Die präzise Definition der reellen oder gar der komplexen Zahlen geht über den üblichen Schulstoff hinaus. Wir werden dies in den kommenden Wochen in der Vorlesung behandeln.

- Weiterhin führen wir für  $m, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \leq n$  noch die Bezeichnung

$$\mathbb{Z}_m^n := \{m, m+1, m+2, \dots, n\} \quad (\text{I.63})$$

für die natürlichen Zahlen zwischen  $m$  und  $n$  ein.

### I.3. Ordnungsrelationen

Die Zeichen  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  haben wir in verschiedenen Beispielen in den vorigen Abschnitten wie selbstverständlich benutzt.

- $a \leq b$  heißt  $a$  **ist kleiner als oder gleich**  $b$ .
- $a \geq b$  heißt  $a$  **ist größer als oder gleich**  $b$ .
- $a < b$  heißt  $a$  **ist kleiner als**  $b$ . Zur Unterscheidung dieser Relation von  $a \leq b$  sagt man auch  $a$  **ist echt kleiner als**  $b$  oder  $a$  **ist strikt kleiner als**  $b$ .
- $a > b$  heißt  $a$  **ist (echt, strikt) größer als**  $b$ .
- Offenbar gilt

$$a < b \iff b > a, \quad (\text{I.64})$$

$$a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b), \quad (\text{I.65})$$

$$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b). \quad (\text{I.66})$$

Die Ordnungsrelation  $<$  lässt sich aber auch auf andere Mengen, als den uns vertrauten Zahlen übertragen. Deshalb ist es zweckmäßig, den Begriff einer geordneten Menge präzise zu definieren.

**Definition I.1.** Eine Menge  $S \neq \emptyset$  heißt **(total) geordnet** bezüglich “ $<$ ” : $\Leftrightarrow$

$$(i) \quad \text{Sind } a, b \in S, \text{ so gilt genau eine der drei Relationen } a < b, a = b \text{ oder } a > b. \quad (\text{I.67})$$

$$(ii) \quad \text{Sind } a, b, c \in S, \text{ und gilt } a < b \text{ und } b < c, \text{ dann gilt auch } a < c. \quad (\text{I.68})$$

Das Symbol “ $<$ ” heißt **Ordnungsrelation** auf  $S$ .

Beispiele für total geordnete Mengen sind  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ . Auf den komplexen Zahlen gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation. Ebenso gibt es keine (mit den Verknüpfungen verträgliche) Ordnungsrelation auf den Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ .

Mit Hilfe der Ordnungsrelation kann man **Intervalle** in  $\mathbb{R}$  definieren. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und

$a \leq b$ . Dann heißen

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{I.69})$$

das **offene Intervall** von  $a$  nach  $b$ ,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{I.70})$$

das **abgeschlossene Intervall** von  $a$  nach  $b$ ,

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{I.71})$$

das **rechts halboffene Intervall** von  $a$  nach  $b$ ,

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{I.72})$$

das **links halboffene Intervall** von  $a$  nach  $b$

und insbesondere

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \quad (\text{I.73})$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}. \quad (\text{I.74})$$

## I.4. Funktionen

**Funktionen**, auch **Abbildungen** genannt, sind die wichtigsten Objekte der Mathematik. Eine Funktion  $f$  ordnet jedem Element  $x$  seiner **Definitions-*m*enge**  $\mathcal{D}$  genau ein Element  $f(x)$  seiner **Wertemenge**  $\mathcal{W}$  zu. Die symbolische Schreibweise dafür ist

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}, \quad x \mapsto f(x). \quad (\text{I.75})$$

Dabei ist die Definitionsmenge zwar voll ausgeschöpft, denn  $f(x)$  ist für jedes  $x \in \mathcal{D}$  definiert. Für die Wertemenge muss das aber nicht der Fall sein. Sind  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$  und  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$  Teilmengen von  $\mathcal{D}$  bzw.  $\mathcal{W}$ , so bezeichnen wir mit

$$f(\mathcal{D}') := \{f(x) \in \mathcal{W} \mid x \in \mathcal{D}'\} \quad (\text{I.76})$$

die **Bildmenge** (oder das Bild) von  $\mathcal{D}'$  und

$$f^{-1}(\mathcal{W}') := \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \in \mathcal{W}'\} \quad (\text{I.77})$$

die **Urbildmenge** (oder das Urbild) von  $\mathcal{W}'$ .

Es kann also  $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{W}$  durchaus eine *echte* Teilmenge des Wertebereichs sein. (Wir sollten hier aber erwähnen, dass diese Konvention nicht einheitlich akzeptiert ist. Manche Autoren verlangen, dass für  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  auch stets  $f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}$  gilt, andere fordern noch nicht einmal, dass  $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{D}$ .)

**Definition I.2.** Seien  $\mathcal{D}, \mathcal{W} \neq \emptyset$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  eine Abbildung.

$$f \text{ heißt } \mathbf{surjektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f(\mathcal{D}) = \mathcal{W}, \quad (\text{I.78})$$

$$f \text{ heißt } \mathbf{injektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in \mathcal{D} : (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'), \quad (\text{I.79})$$

$$f \text{ heißt } \mathbf{bijektiv} \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ ist surjektiv und injektiv.} \quad (\text{I.80})$$

### Bemerkungen und Beispiele.

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^x$  ist nicht surjektiv, (wegen  $e^x > 0$ ) aber injektiv (wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion).
- $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $x \mapsto \sin x$  ist surjektiv aber nicht injektiv.
- $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \tan x$  ist bijektiv.

**Definition I.3.** Für  $g : A \rightarrow B$  und  $f : g(A) \rightarrow C$  ist die **Verkettung** oder **Komposition** oder auch **Hintereinanderschaltung**  $f \circ g$  von  $g$  und  $f$  wie folgt definiert:

$$f \circ g : A \rightarrow C, \quad x \mapsto f(g(x)). \quad (\text{I.81})$$

**Satz I.4.** Seien  $g : A \rightarrow B$  und  $f : B \rightarrow C$ .

- (i) Sind  $f$  und  $g$  surjektiv, so ist auch  $f \circ g : A \rightarrow C$  surjektiv.
- (ii) Sind  $f$  und  $g$  injektiv, so ist auch  $f \circ g : A \rightarrow C$  injektiv.
- (iii) Sind  $f$  und  $g$  bijektiv, so ist auch  $f \circ g : A \rightarrow C$  bijektiv.

*Beweis.*

Zu (i): Sei  $c \in C$ . Weil  $f$  surjektiv ist, gibt es ein  $b \in B$  mit  $f(b) = c$ . Weil  $g$  surjektiv ist, gibt es ein  $a \in A$  mit  $g(a) = b$ . Also gilt  $(f \circ g)(a) = c$ .

Zu (ii): Seien  $a, a' \in A$  mit  $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$ . Weil  $f$  injektiv ist, folgt  $g(a) = g(a')$ . Weil  $g$  injektiv ist, folgt dann auch  $a = a'$ .

Zu (iii): Folgt aus (i) und (ii). □

Wichtig ist also zu beachten, dass der Definitionsbereich von  $f$  mit dem Bildbereich von  $g$  übereinstimmt. Man beachte auch die Reihenfolge: obwohl die Komposition  $f \circ g$  heißt, wird erst  $g$  auf  $x \in A$  angewandt und danach  $f$  auf das Ergebnis  $g(x) \in B$ .

Eine wichtige Klasse von Funktionen ist die der charakteristischen Funktionen, auch Indikatorfunktionen genannt. Ist  $\mathcal{D}$  eine nichtleere Menge und  $A \subseteq \mathcal{D}$  eine Teilmenge, so ist die **charakteristische Funktion** von  $A$  gegeben als

$$\mathbb{1}_A : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \quad (\text{I.82})$$

Mit anderen Worten:  $\mathbb{1}_A[x]$  ist genau dann gleich 1, wenn  $x$  in  $A$  liegt und anderenfalls gleich 0.

## I.5. Beweistechniken

### I.5.1. Vollständige Induktion

Eine häufig verwendete Beweistechnik ist die **vollständige Induktion**. Zunächst stellen wir das Verfahren abstrakt vor. Nehmen wir an, wir wollten Aussagen  $A(1), A(2), A(3), \dots$  beweisen. Dann können wir folgende Tatsache verwenden.

**Satz I.5.** *Gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $A(n_0)$  wahr ist, und gilt die Implikation*

$$A(n) \Rightarrow A(n+1), \quad (\text{I.83})$$

*für jedes  $n \geq n_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $A(m)$  wahr, für jedes  $m \geq n_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Wendet man (I.83)  $(m - n_0)$ -mal an, so erhält man

$$A(n_0) \Rightarrow A(n_0 + 1) \Rightarrow A(n_0 + 2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A(m - 1) \Rightarrow A(m). \quad (\text{I.84})$$

□

Der Beweis durch vollständige Induktion wird an einem Beispiel am deutlichsten. Wir wollen für  $n \in \mathbb{N}$  die Summe

$$F(n) := 1 + 2 + \cdots + n \quad (\text{I.85})$$

berechnen, und wir haben die Vermutung, dass  $F(n) = G(n)$ , wobei

$$G(n) := \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{I.86})$$

Nun gilt es, die Aussage

$$A(n) = w \quad :\Leftrightarrow \quad F(n) = G(n) \quad (\text{I.87})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen.

- **Induktionsanfang:** Wähle  $n_0 := 1$ . Dann ist

$$F(n_0) = F(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = G(1) = G(n_0), \quad (\text{I.88})$$

und  $A(n_0) = A(1) = w$ .

- **Induktionsannahme:** Seien  $n \geq 1$  und gelte  $A(n) = w$ , also  $F(n) = G(n)$ .
- **Induktionsschritt:** Wir zeigen, dass aus  $A(n) = w$  auch  $A(n+1) = w$  folgt. Dazu beobachten wir, dass unter Verwendung von  $F(n) = G(n)$  auch

$$\begin{aligned} F(n+1) &= n+1 + F(n) = n+1 + G(n) = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = G(n+1) \end{aligned} \quad (\text{I.89})$$

gilt, dass somit also  $A(n+1) = w$  richtig ist.

Nach Satz I.5 ist damit  $A(n) = w$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen.

## I.5.2. Beweis durch Kontraposition

Neben der vollständigen Induktion ist auch der Beweis durch Kontraposition eine häufig verwendete Methode, die auf (I.25) beruht,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \quad (\text{I.90})$$

Wir illustrieren dies wieder mit einem Beispiel: Seien die Aussagen  $A$  und  $B$  definiert durch

$$A = w :\Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \quad (\text{I.91})$$

$$B = w :\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}, \text{ ggT}(p, q) = 1 : 2q^2 = p^2 \quad (\text{I.92})$$

wobei  $\text{ggT}(a, b) \in \mathbb{N}$  den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlichen Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  bezeichne.

Ist nun  $A = w$ , so gibt es Zahlen  $p', q' \in \mathbb{N}$  so, dass  $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$  gilt. Enthalten  $p'$  und  $q'$  einen gemeinsamen ganzzahligen Faktor  $r \in \mathbb{N}$ , sodass also  $p' = pr$  und  $q' = qr$  gelten, so können wir  $r$  herauskürzen und erhalten  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  mit teilerfremden  $p$  und  $q$ , d.h.  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Damit ist auch  $B = w$ , und wir erhalten

$$A \Rightarrow B. \quad (\text{I.93})$$

Die Aussage  $B$  ist jedoch stets falsch, weil dann der Primfaktor 2 in  $2q^2$  in ungerader Anzahl und in  $p^2$  in gerader Anzahl auftreten müsste.

$$\{B = f\} \Rightarrow \{\neg B = w\} \Rightarrow \{\neg A = w\} \Rightarrow \{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\}. \quad (\text{I.94})$$

Wir bemerken, dass der Beweis durch Kontraposition sehr ähnlich zur Methode des *Widerspruchsbeweises* ist, letzterer beruht auf  $[A \Rightarrow B] = (\neg A) \vee B = \neg[A \wedge (\neg B)]$ .

## I.6. Notationen

Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \leq n$  und

$$A = \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n\} \quad (\text{I.95})$$

eine Menge von Zahlen. Dann ist das Summenzeichen wie folgt definiert,

$$\sum_{i=m}^n a_i := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n. \quad (\text{I.96})$$

Wir bemerken, dass der *Summationsindex*  $i$  durch irgend einen anderen Buchstaben außer  $m$  oder  $n$  ersetzt werden kann,

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j. \quad (\text{I.97})$$

Für  $m > n$  wird  $\sum_{i=m}^n a_i := 0$  definiert.

Mit  $\mathcal{I} := \{m, m+1, \dots, n\}$  und  $A$  wird die Summe auch oft noch anders geschrieben:

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = \sum_{a \in A} a. \quad (\text{I.98})$$

## I.7. Ergänzungen

### I.7.1. Äquivalenzrelationen

Häufig lässt sich eine Menge in eine Familie disjunkter Teilmengen zerlegen, deren Elemente jeweils ähnliche Eigenschaften haben. Beispiel:

Wir zerlegen  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ , wobei

$$A_0 := 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad (\text{I.99})$$

$$A_1 := 3\mathbb{Z} + 1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad (\text{I.100})$$

$$A_2 := 3\mathbb{Z} + 2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{I.101})$$

Offensichtlich sind  $A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_0 \cap A_2 = \emptyset$ . Die Elemente in  $A_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie einen Rest  $j$  beim Teilen durch 3 ergeben.

Wir formalisieren nun diese Überlegungen.

**Definition I.6.** Sei  $A$  eine Menge. Eine Abbildung  $R : A \times A \rightarrow \{w, f\}$  heißt **Relation auf  $A$** . Für  $R(a, b) = w$  schreiben wir auch  $a \sim b$ .

**Definition I.7.** Eine Relation  $R : A \times A \rightarrow \{w, f\}$  auf einer Menge  $A$ , mit  $R(a, b) = w \Leftrightarrow a \sim b$  heißt **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

$$\textbf{Reflexivität} \quad \forall a \in A : \quad a \sim a, \quad (\text{I.102})$$

$$\textbf{Symmetrie} \quad \forall a, b \in A : \quad a \sim b \Leftrightarrow b \sim a, \quad (\text{I.103})$$

$$\textbf{Transitivität} \quad \forall a, b, c \in A : \quad (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow (a \sim c). \quad (\text{I.104})$$

**Satz I.8.** Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $A$  bewirkt eine Zerlegung von  $A$  in disjunkte Teilmengen. Dabei sind zwei Elemente aus  $A$  genau dann äquivalent, wenn sie derselben Teilmenge angehören.

*Beweis.* Zu  $a \in A$  definieren wir

$$[a]_{\sim} := \{x \in A \mid a \sim x\}. \quad (\text{I.105})$$

Wegen  $a \in [a]_{\sim}$  ist  $[a]_{\sim}$  nicht leer. Wir zeigen nun für  $a, b \in A$ , dass

$$\text{entweder} \quad [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset \quad (\text{I.106})$$

$$\text{oder} \quad [a]_{\sim} = [b]_{\sim} \quad (\text{I.107})$$

gilt. (Wegen  $[a]_{\sim} \neq \emptyset$  können (I.106) und (I.107) nicht gleichzeitig gelten.)

Sei  $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset$ . Dann gibt es also ein gemeinsames Element  $c \in [a]_{\sim}, c \in [b]_{\sim}$ . Damit gelten  $a \sim c$  und  $c \sim b$ , also auch  $a \sim b$ . Ist nun  $x \in [a]_{\sim}$ , dann gilt  $x \sim a$  und mit  $a \sim b$  auch  $x \sim b$ , also  $x \in [b]_{\sim}$ . Es folgt, dass  $[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$ . Genauso erhält man  $[b]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim}$ , also  $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$ . Damit ist (I.106)–(I.107) gezeigt.

Schreiben wir jetzt

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\sim}, \quad (\text{I.108})$$

folgt die Aussage unmittelbar durch Zusammenfassen gleicher  $[a]_{\sim}$ .  $\square$

**Definition I.9.** Die Teilmengen  $[a]_{\sim}$  heißen **Äquivalenzklassen**. Die Familie der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit

$$A/\sim \quad (\text{sprich: " } A \text{ modulo } \sim \text{ ").} \quad (\text{I.109})$$

Liegt  $a$  in einer Äquivalenzklasse, so heißt  $a$  **Repräsentant der Klasse**.

**Bemerkungen und Beispiele.** Sind  $A := \mathbb{Z}$  die ganzen Zahlen und  $p \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl, so sind

$$m \sim n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \quad m - n = kp. \quad (\text{I.110})$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} = [0]_{\sim} \cup [1]_{\sim} \cup \dots \cup [p-1]_{\sim}, \quad (\text{I.111})$$

$$[j]_{\sim} = \{kp + j \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{I.112})$$

$\mathbb{Z}/\sim$  bezeichnet man auch mit  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}_p$  und  $[j]_{\sim} =: [j] \bmod p$ .

**Definition I.10.** Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $A$ . Eine Teilmenge  $S \subseteq A$  heißt ein **vollständiges Repräsentantensystem zu  $\sim$** , falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

- (i) Jedes Element aus  $A$  ist zu einem Element aus  $S$  äquivalent.
- (ii) Die Elemente aus  $S$  sind paarweise nicht äquivalent.

**Bemerkungen und Beispiele.**

$$A := \{g \subseteq \mathbb{R}^2 \mid g \text{ ist eine Gerade}\}, \quad (\text{I.113})$$

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind parallel.}$$

$$\Rightarrow S = \{g \in A \mid g \cap \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}\} \quad (\text{I.114})$$

$$\text{ist ein vollständiges Repräsentantensystem.} \quad (\text{I.115})$$

## I.7.2. Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet wird in der Mathematik häufig verwendet. Zum Abschluss geben wir noch eine Liste der gebräuchlichsten griechischen Buchstaben:

| KLEIN                 |                |                    |                  |                    |  |
|-----------------------|----------------|--------------------|------------------|--------------------|--|
| $\alpha$ alpha        | $\beta$ beta   | $\gamma$ gamma     | $\delta$ delta   | $\epsilon$ epsilon |  |
| $\varepsilon$ epsilon | $\zeta$ zeta   | $\eta$ eta         | $\theta$ theta   | $\vartheta$ theta  |  |
| $\iota$ jota          | $\kappa$ kappa | $\lambda$ lambda   | $\mu$ mü         | $\nu$ nü           |  |
| $\xi$ xi              | $\omicron$ o   | $\pi$ pi           | $\varphi$ phi    | $\rho$ rho         |  |
| $\varrho$ rho         | $\sigma$ sigma | $\varsigma$ sigma  | $\tau$ tau       | $\upsilon$ upsilon |  |
| $\phi$ phi            | $\varphi$ phi  | $\chi$ chi         | $\psi$ psi       | $\omega$ omega     |  |
| GROSS                 |                |                    |                  |                    |  |
| $\Gamma$ Gamma        | $\Delta$ Delta | $\Theta$ Theta     | $\Lambda$ Lambda | $\Xi$ Xi           |  |
| $\Pi$ Pi              | $\Sigma$ Sigma | $\Upsilon$ Upsilon | $\Phi$ Phi       | $\Psi$ Psi         |  |
| $\Omega$ Omega        |                |                    |                  |                    |  |