Technische Universität Braunschweig

4. Übungsblatt

Ausgabe: 09.11.2026

Die Lösungen werden in der Woche vom 16.11.2026 - 20.11.2026 vorgestellt.
Eine Abgabe der Lösungen von Ihrer Seite ist nicht vorgesehen.

Aufgabe 4.1

Gegeben sei der hyperbolische Paraboloid

$$M \coloneqq \{(x, y, x^2 - y^2)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Für die Karte $C = (M, \varphi)$ mit

$$\varphi : M \to \mathbb{R}^2 , \quad p \mapsto (p_1, p_2)^T$$

ist M eine 2-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit.

(a) Bestimmen Sie für $p \in M$ die Tangentialvektoren $v_1(p, \varphi)$ und $v_2(p, \varphi)$.

(b) Bestimmen Sie für $p \in M$ den Normalenvektor $b(p, \varphi)$. Entscheiden Sie begründet, ob die Mannigfaltigkeit M orientierbar ist.

(c) Geben Sie eine Karte $C' = (M, \varphi')$ so an, dass $b(p, \varphi') = -b(p, \varphi)$ für alle $p \in M$ gilt.

Aufgabe 4.2

Zeigen Sie, dass durch die Einschränkung

$$S \coloneqq \{(x, y, x^2 - y^2)^T \mid x \geq y\} \subset \mathbb{R}^3$$

des hyperbolischen Paraboloiden eine berandete Mannigfaltigkeit gegeben ist.

Aufgabe 4.3

Gegeben sei der Kegel

$$K \;\coloneqq\; \{(x,y,z)^T \,|\, 0 \le z \le 1\,,\; x^2+y^2 \le z^2\} \;\subset\; \mathbb{R}^3\,.$$

Weiter sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z)^T \mapsto (x^3,y^3,z^3)^T\,.$$

gegeben. Verifizieren Sie den Satz von Gauß, indem Sie beide Seiten der Gleichung

$$\int_{\partial K} \langle f(p) \,|\, n_p \rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_K \nabla \cdot f(p)\, d^3p$$

berechnen.

Aufgabe 4.4

Gegeben sei das Dreieck

$$D \;\coloneqq\; \{(x_1,x_2)^T \,|\, 0 \le x_2 \le 1\,,\; -x_2 \le x_1 \le x_2\} \;\subset\; \mathbb{R}^2\,.$$

und das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad p \mapsto ((p_1+p_2)^2,(p_1-p_2)^2)^T\,.$$

Verifizieren Sie den Satz von Stokes, indem Sie beide Seiten der Gleichung

$$\int_D \nabla \wedge f(p)\, d^2p \;=\; \int_{\partial D} f(p) \cdot \, d\sigma(p)$$

berechnen.

Hinweis: Achten Sie für die Berechnung des Wegintegrals darauf, dass Sie den Rand ∂K in mathematisch positive Richtung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, parametrisieren.