Technische Universität Braunschweig

3. Übungsblatt

Ausgabe: 02.11.2026

Die Lösungen werden in der Woche vom 09.11.2026 - 13.11.2026 vorgestellt.
Eine Abgabe der Lösungen von Ihrer Seite ist nicht vorgesehen.

Aufgabe 3.1

Durch die Menge

$$S \coloneqq \left\{(\alpha\cos(z), \alpha\sin(z), z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < z < 2\pi,\ 0 < \alpha < R\right\}$$

sei eine Schraube mit Radius $R > 0$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei S um eine 2-dimensionale parametrisierte Hyperfläche handelt, indem Sie eine geeignete Parametrisierung von S angeben.

(b) Berechnen Sie das Hyperflächen-Integral

$$\int_S \sqrt{\frac{1 + s_1^2 + s_2^2}{s_3}}\, d\sigma(s)\,.$$

Aufgabe 3.2

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die ε-Umgebung von $\mathbb{S}^2$ durch

$$\mathbb{S}^2(\varepsilon) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^2) < \varepsilon\}\,,$$

wobei der Abstand $\operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^2)$ durch

$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^2) \;=\; \inf_{s \in \mathbb{S}^2} |x - s|$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{S}^2(\varepsilon) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 - \varepsilon < |x| < 1 + \varepsilon\}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{S}^2} 1\, d\sigma(s) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{S}^2(\varepsilon)} 1\, d^3x\right\}.$$

Nutzen Sie für das Oberflächenintegral über $\mathbb{S}^2$ eine Parametrisierung Ihrer Wahl.

Aufgabe 3.3

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in \mathcal{C}^\infty((a,b);\mathbb{R})$. Der *Funktionsgraph* von f sei durch die Menge

$$\Gamma(f) \;\coloneqq\; \{(t, f(t))^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in (a,b)\}$$

gegeben. Wir definieren die Bogenlänge $L(f)$ des Funktionsgraphen von f durch

$$L(f) \;\coloneqq\; \int_{\Gamma(f)} 1\, d\sigma(s)\,,$$

indem wir $\Gamma(f)$ als 1-dimensionale Hyperfläche auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge von $\Gamma(f)$ durch

$$L(f) \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Funktionsgraphen der Funktionen

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto 2t^{3/2} + 3\,.$$

Aufgabe 3.4

Gegeben Sie die Kreisscheibe

$$D \;\coloneqq\; \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\}\,,$$

welche mit einem Einheitsabstand parallel zur x_1-x_2-Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt. Der Normalenvektor von D sei durch $n = (0,0,1)^T$ gegeben. Weiter sei das Vektorfeld

$$E(x) : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3\,, \quad x \mapsto \nabla\frac{1}{|x|}$$

gegeben. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_D \langle n \,|\, E(s)\rangle\, d\sigma(s)\,,$$

mittels einer Parametrisierung Ihrer Wahl.