Technische Universität Braunschweig

2. Übungsblatt

Ausgabe: 26.10.2026

Die Lösungen werden in der Woche vom 02.11.2026 - 07.11.2026 vorgestellt.
Eine Abgabe der Lösungen von Ihrer Seite ist nicht vorgesehen.

Aufgabe 2.1

Es sei (X, ρ) ein metrischer Raum und $\mathfrak{O}$ die Familie der offenen Mengen in X bezüglich ρ. Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum ist.

Erinnerung: Eine Menge $U \subseteq X$ heißt offen bezüglich ρ

$$:\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \, \exists r > 0 : \quad B_\rho(x, r) \subseteq U \, .$$

Aufgabe 2.2

Sei X eine nichtleere Menge. Für $U, V \in \mathfrak{P}(X)$ sei die Relation

$$U \sim V \;\; :\Leftrightarrow \;\; \text{Es existiert eine bijektive Abbildung } \varphi : A \to B$$

definiert. Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(X)$ handelt.

Aufgabe 2.3

Gegeben sei der Kegel

$$K \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} z\cos(\alpha) \\ z\sin(\alpha) \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le \alpha < 2\pi,\, 0 \le z \le 1 \right\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^3 \, .$$

Wir definieren die Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) von K durch

$$\begin{aligned} U_1 \;&:= \left\{ (x, y, z)^T \in K \,|\, 0 < y \,, 0 < z < 1 \right\} , \\ U_2 \;&:= \left\{ (x, y, z)^T \in K \,|\, 0 < z < 1 \right\} \end{aligned}$$

und

$$\varphi_1 : U_1 \to (0,\pi)\times(0,1)\,, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \arccos(x/z) \\ z \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 : U_1 \to \left\{(x,y)^T \,|\, 0 < x^2+y^2 < 1\right\}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Karten $C_1 = (U_1, \varphi_1)$ und $C_2 = (U_2, \varphi_2)$ verträglich sind.

Aufgabe 2.4

Es sei

$$\mathbb{S}^2 \coloneqq \left\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

die Einheitsspähre in $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathbb{E} \;\coloneqq\; \left\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

die x_1-x_2-Ebene. Für einen Punkt $s \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)^T\}$ besitzt die Gerade, welche durch s und den Nordpol $(0,0,1)^T$ verläuft, den eindeutigen Schnittpunkt $\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)^T \in \mathbb{E}$ mit der Ebene $\mathbb{E}$. Diese Schnittpunkte definieren durch die Abbildung

$$U_+ \coloneqq \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)^T\}\,, \quad \varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2\,, \quad s \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)^T$$

eine Karte $C_+ = (U_+, \varphi_+)$ von $\mathbb{S}^2$. Eine analoge Konstruktion für Geraden durch den Südpol $(0,0,-1)^T$ definiert die Karte $C_- = (U_-, \varphi_-)$ mit

$$U_- \;\coloneqq\; \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)^T\}\,, \quad \varphi_- : U_+ \to \mathbb{R}^2\,, \quad s \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)^T.$$

(a) Geben Sie jeweils die Umkehrfunktionen, zu den Karten C_+ und C_- an.

(b) Zeigen Sie, dass die Karten $\left\{C_+, C_-\right\}$ einen Atlas von $\mathbb{S}^2$ bilden.