



1. Übungsblatt

Ausgabe: 19.10.2026

Die Lösungen werden in der Woche vom 26.10.2026 - 30.10.2026 vorgestellt.

Eine Abgabe der Lösungen von Ihrer Seite ist nicht vorgesehen.

Aufgabe 1.1

- (a) Erinnern Sie sich an die Begriffe *Sigma-Algebra*, *Messbarkeit* und *Maßraum*.
- (b) Diskutieren Sie im Speziellen die Begriffe *Lebesgue-Maß*, *Borel-Sigma-Algebra* und *reelle Messbarkeit*.
- (c) Erinnern Sie sich an den Begriff der *Lebesgue-Integrabilität*.

Aufgabe 1.2

Die **Fouriertransformierte** einer μ_d -integrierten Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ sei durch die Funktion

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi \mapsto \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) d^d x$$

definiert.

- (a) Begründen Sie, dass die Integrale $\mathcal{F}[f](\xi)$ in der obigen Definition für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$ tatsächlich existieren.
- (b) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine μ_d -integrierte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathcal{F}[f]$ auf $\mathbb{R}^d$ stetig ist.

Aufgabe 1.3

Es sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine μ_d -integrierte Funktion und $k \in \mathbb{Z}_1^d$. Die Funktion $x \mapsto x_k f(x)$ sei ebenfalls integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[-ix_k f],$$

indem Sie den Satz der majorisierte Konvergenz auf den Differenzenquotienten von $\mathcal{F}[f](\xi)$ anwenden.

Aufgabe 1.4

- (a) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^2} d^d x = \pi^{d/2} \quad (1)$$

gilt. Zeigen Sie dazu zuerst (1) für $d = 2$ mit Hilfe der Transformationsformel und Verwendung von Polarkoordinaten, folgern Sie anschließend (1) für $d = 1$ aus dem Satz von Fubini-Tonelli und schließlich für $d > 2$ abermals mit dem Satz von Fubini-Tonelli.

- (b) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie mittels der Transformationsformel, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(Ax+b)^2} d^d x = |\det(A)|^{-1} \pi^{d/2}.$$