II. Gaußscher Satz und Stokesscher Satz

II.1. Normalenvektoren und Orientierung

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine eingebettete Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^d$ der Dimension $m = d-1$ mit Karte $\phi = (U, \varphi)$. Die Basis $\{v_1(p,\phi), \ldots, v_{d-1}(p,\phi)\}$ des Tangentialraumes $T_p = \operatorname{span}\{v_1(p,\phi), \ldots, v_{d-1}(p,\phi)\}$ wollen wir für $p \in U$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^d$ ergänzen. Offensichtlich ist

$$\dim T_p^{\perp} \;=\; 1, \tag{II.1}$$

und wir brauchen nur einen einzigen Vektor $b(p,\phi) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zu bestimmen, so dass

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^{d-1}: \qquad \langle b(p,\phi) \mid v_\alpha(p,\phi)\rangle \;=\; 0. \tag{II.2}$$

Die folgende Definition gibt eine explizite Konstruktion von $b(p,\phi)$. Dazu verwenden wir hier und im Folgenden die Notation

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^{d-1}, j \in \mathbb{Z}_1^{d}: \qquad v_\alpha^j(p,\phi) \;:=\; \left.\frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_\alpha}\right|_{x=\varphi(p)} \tag{II.3}$$

für die j. Komponente des Tangentialvektors $v_\alpha(p,\phi)$.

Definition II.1. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $m = d-1$ mit Karte $\phi = (U,\varphi)$ und zugehörigen Tangentialvektoren $\{v_1(p,\phi), \ldots, v_{d-1}(p,\phi)\}$ mit Komponenten $v_\alpha^j = \partial\psi_j(x)/\partial x_\alpha$, wobei $\psi := \varphi^{-1}$ und $p = \psi(x)$. Der zu ϕ am Punkt p gehörige **Normalenvektor** $b(p,\phi) := (b_1, \ldots, b_d)^T \in \mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} b_j \;&:= (-1)^{d-1} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_d : \pi(d) = j} (-1)^\pi \left(\frac{\partial \psi_{\pi(1)}(x)}{\partial x_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial \psi_{\pi(d-1)}(x)}{\partial x_{d-1}}\right) \\ &= (-1)^{d-1} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_d : \pi(d) = j} (-1)^\pi \, v_1^{\pi(1)} \cdots v_{d-1}^{\pi(d-1)}. \end{aligned} \tag{II.4}$$

Den entsprechenden normierten Vektor $\vec{n}(p,\phi) := \|b(p,\phi)\|^{-1} \, b(p,\phi)$ bezeichnet man als **Normaleneinheitsvektor**.

Bemerkungen und Beispiele.

• Für $k \in \mathbb{Z}_1^d$ ist $b_k = (-1)^{d-1} \det[J_\psi^{(k)}]$, wobei die $d \times d$-Matrix $J_\psi^{(k)} = (v_1, \ldots, v_{d-1}, e_k)$ aus der Jacobimatrix $J_\psi(x)$ von ψ bei $x = \varphi(p)$ durch Anfügen des kanonischen Basisvektors e_k als letzte Spalte hervorgeht,

$$b_k \;=\; (-1)^{d-1} \det\big(v_1, \ldots, v_{d-1}, e_k\big) \;=\; \det\big(e_k, v_1, \ldots, v_{d-1}\big) \;=\; \det\big(e_k, J_\psi(x)\big). \tag{II.5}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass der in (II.4) definierte Normalenvektor die gewünschten Orthogonalitätseigenschaften hat und außerdem noch richtig normiert ist

Lemma II.2. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $m = d-1$ mit Karte $\phi = (U, \varphi)$, zugehörigen Tangentialvektoren $\{v_1(p,\phi), \ldots, v_{d-1}(p,\phi)\}$ und Normalenvektor $b(p,\phi) := (b_1, \ldots, b_d)^T \in \mathbb{R}^d$. Dann gelten folgende Aussagen:

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^{d-1} : \langle b(p,\phi) \,|\, v_\alpha(p,\phi)\rangle \;=\; 0, \tag{II.6}$$

$$\|b(p,\phi)\| \;=\; \sqrt{g(p,\phi)}\,, \tag{II.7}$$

$$T_p^\perp \;=\; \operatorname{span}\{b(p,\phi)\}. \tag{II.8}$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass (II.8) trivial aus der Dimensionsformel, (II.6) und (II.7) resultiert, da letztere Gleichung auch insbesondere $b(p,\phi) \neq 0$ impliziert. Den Beweis von (II.7) findet man im Abschnitt II.5.1. Zum Beweis von (II.6) wählen wir $\alpha \in \mathbb{Z}_1^{d-1}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\langle b | v_\alpha\rangle \;&=\; \sum_{j=1}^d v_\alpha^j\, b_j \;=\; (-1)^{d-1} \sum_{j=1}^d \sum_{\pi\in\mathcal{S}_d:\pi(d)=j} (-1)^\pi\, v_1^{\pi(1)} \cdots v_{d-1}^{\pi(d-1)} \cdot v_\alpha^{\pi(d)} \\
&= (-1)^{d-1} \sum_{\pi\in\mathcal{S}_d} (-1)^\pi\, v_1^{\pi(1)} \cdots v_\alpha^{\pi(\alpha)} \cdots v_{d-1}^{\pi(d-1)} \cdot v_\alpha^{\pi(d)} \\
&= (-1)^{d-1} \det\big[v_1, \ldots, v_\alpha, \ldots, v_{d-1}, v_\alpha\big] \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{II.9}$$

da zwei Spalten in der Determinante in der letzten Zeile in (I.38) gleich sind. □

Lemma II.3. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $m = d-1$ und $\phi = (U,\varphi)$, $\tilde\phi = (\widetilde U, \tilde\varphi)$ zwei verträgliche Karten mit $p \in \widehat U = U \cap \widetilde U$ und zugehörigen Normalenvektoren $b(p,\phi), b(p,\tilde\phi) \in \mathbb{R}^d$. Dann ist

$$b(p,\phi) \;=\; \det\big[J_{\tilde\varphi\circ\varphi^{-1}}\big(\varphi(p)\big)\big]\, b(p,\tilde\phi)\,. \tag{II.10}$$

Beweis. Seien $Q = \big(q_{i,j}\big)_{i\in\mathbb{Z}_1^d, j\in\mathbb{Z}_1^{d-1}} := J_\psi(x)$ $\widetilde Q = \big(\tilde q_{i,j}\big)_{i\in\mathbb{Z}_1^d, j\in\mathbb{Z}_1^{d-1}} := J_{\tilde\psi}(\tilde x)$ die Jacobimatrizen von $\psi = \varphi^1$ bei $x = \varphi(p)$ bzw. $\tilde\psi = \tilde\varphi^1$ bei $\tilde x = \tilde\varphi(p)$ und $A = \big(a_{j,k}\big)_{j,k\in\mathbb{Z}_1^{d-1}} := J_{\tilde\varphi\circ\psi}(x)$ die Jacobimatrix von $\tilde\varphi\circ\psi$ bei $x = \varphi(p)$. Aus der Kettenregel folgt

$$Q \;=\; J_\psi(x) \;=\; J_{\tilde\psi}(\tilde x)\, J_{\tilde\varphi\circ\psi}(x) \;=\; \widetilde Q\, A \tag{II.11}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,d-1} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{d,1} & \cdots & q_{d,d-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tilde q_{1,1} & \cdots & \tilde q_{1,d-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde q_{d,1} & \cdots & \tilde q_{d,d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d-1,1} & \cdots & a_{d-1,d-1} \end{pmatrix}. \tag{II.12}$$

Fügen wir für festes $k \in \mathbb{Z}_1^d$ zu Q und zu $\widetilde{Q}$ jeweils den Spaltenvektor $e_k = \big(\delta_{1,k}, \delta_{2,k}, \ldots, \delta_{d,k}\big)^T \in \mathbb{R}^2$ hinzu, so erhalten wir daraus

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,k} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{d,k} & q_{d,1} & \cdots & q_{d,d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,k} & \tilde{q}_{1,1} & \cdots & \tilde{q}_{1,d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{d,k} & \tilde{q}_{d,1} & \cdots & \tilde{q}_{d,d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,d-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{d-1,1} & \cdots & a_{d-1,d-1} \end{pmatrix}, \tag{II.13}$$

bzw. kürzer formuliert, dass

$$\Big(e_k, Q\Big) \;=\; \Big(e_k, \widetilde{Q}\Big) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \tag{II.14}$$

Damit erhalten wir aus (II.5) für alle $k \in \mathbb{Z}_1^d$, dass

$$b_k \;=\; \det\Big(e_k, Q\Big) \;=\; \Big(e_k, \widetilde{Q}\Big) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \;=\; \tilde{b}_k \cdot \det[A]\,. \tag{II.15}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $d = 2$ und $m = 1$, dann sind die Permutationen gegeben durch

$$\big\{\pi \in \mathcal{S}_2 \mid \pi(2) = 1\big\} \;= \left\{\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad (-1)^{\pi_1} = -1, \tag{II.16}$$

$$\big\{\pi \in \mathcal{S}_2 \mid \pi(2) = 2\big\} \;= \left\{\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}, \quad (-1)^{\pi_1} = +1. \tag{II.17}$$

  Daher ist

$$b(p,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^{2-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi_2(u_1)}{\partial u_1} \\ \\ \frac{\partial \psi_1(u_1)}{\partial u_1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_2(u_1)}{\partial u_1} \\ \\ -\frac{\partial \psi_1(u_1)}{\partial u_1} \end{pmatrix}. \tag{II.18}$$

- Seien $d = 3$ und $m = 2$, dann sind die Permutationen gegeben durch

$$\big\{\pi \in \mathcal{S}_3 \mid \pi(3) = 1\big\} \;= \left\{\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(-1)^{\pi_1} = 1\;,\; (-1)^{\pi_2} = -1; \tag{II.19}$$

$$\big\{\pi \in \mathcal{S}_3 \mid \pi(3) = 2\big\} \;= \left\{\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\; \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(-1)^{\pi_3} = 1\;,\; (-1)^{\pi_4} = -1; \tag{II.20}$$

$$\big\{\pi \in \mathcal{S}_3 \mid \pi(3) = 3\big\} \;= \left\{\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\; \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\},$$

$$(-1)^{\pi_5} = 1\;,\; (-1)^{\pi_6} = -1. \tag{II.21}$$

Wegen $(-1)^{3-1} = 1$ ist daher

$$b(p,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_3}{\partial u_2} - \frac{\partial\psi_3}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial u_2} \end{pmatrix} \;=\; v_1(p,\phi)\times v_2(p,\phi), \qquad \text{(II.22)}$$

wobei das Vektorprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert ist durch

$$\vec{a}\times b \;:=\; \begin{pmatrix} a_2\,b_3 & - & a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 & - & a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 & - & a_2\,b_1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(II.23)}$$

- Der Normalenvektor $b(p,\phi)$ und der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(p,\phi)$ sind absichtlich *nicht* mit beliebigem Vorzeichen definiert worden. Ist die betrachtete Fläche Teil der Berandung eines Gebiets, so können diese Vektoren *in das Gebiet hinein* oder *aus dem Gebiet heraus* zeigen.
- Diese Überlegung führt auf den Begriff der **Orientierung** einer Mannigfaltigkeit: Zwei verträgliche Karten $\phi = (U,\varphi)$ und $\tilde{\phi} = (\widetilde{U},\tilde{\varphi})$ einer Mannigfaltigkeit M (nicht notwendig eingebettet in $\mathbb{R}^d$ und auch nicht notwendig $(d-1)$-dimensional) heißen **orientierungsäquivalent**, $\phi\hat{\sim}\tilde{\phi}$, falls $\det[J_{\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}}] > 0$ auf $U\cap\widetilde{U}$ gilt.
- Orientierungsäquivalenz ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation, wie man leicht nachprüft.
- Sind M eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und zwei verträgliche Karten ϕ und $\tilde{\phi}$ von M orientierungsäquivalent, $\phi\hat{\sim}\tilde{\phi}$, so gilt $n(p,\phi) = n(p,\tilde{\phi})$.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M, dessen Karten alle paarweise orientierungsäquivalent sind, heißt **orientiert**.
- Nicht alle m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzen einen orientierten Atlas; das Möbiusband in $\mathbb{R}^3$ ist ein Beispiel dafür. Sind jedoch M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, und existiert ein orientierter Atlas von M, so heißt M **orientierbar**.
- Für eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit Γ, d.h. für einen Weg, geben die beiden Orientierungsäquivalenzklassen anschaulich gerade die beiden Durchlaufrichtungen des Weges an.
- Der Wechsel eines rechthändigen in ein linkshändiges Koordinatensystem in $\mathbb{R}^3$ ist eine Permutation $\pi\in\mathcal{S}_3$ der Koordinaten mit $(-1)^\pi = -1$. Dazu betrachten wir $\mathbb{R}^3$ als Mannigfaltigkeit mit Atlanten $\{(\mathbb{R}^3, id)\}$ und $\{\phi := (\mathbb{R}^3,\varphi)\}$, wobei $id : (p_1,p_2,p_3)^T \mapsto (p_1,p_2,p_3)^T$ und $\phi : (p_1,p_2,p_3)^T \to (p_{\pi(1)},p_{\pi(2)},p_{\pi(3)})^T$. Dann ist $\det[J_{\phi\circ id^{-1}}] = -1 < 0$, und ϕ wechselt die Orientierung von $\mathbb{R}^3$ (als Mannigfaltigkeit der Dimension 3).

Satz II.4. Sind $d\in\mathbb{N}$ und $M\subseteq\mathbb{R}^d$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $d-1$, so ist $M\subseteq\mathbb{R}^d$ genau dann orientierbar, wenn auf M ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld $(p\mapsto n_p)\in C(M;\mathbb{S}^{d-1})$ existiert.

Beweis. Sind $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas von M und $\phi = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte daraus, so ist mit $n(p,\phi) := b(p,\phi)/\|b(p,\phi)\|$ das zu ϕ gehörige Normaleneinheitsvektorfeld offensichtlich stetig auf U, d.h. $\big(p \mapsto n(p,\phi)\big) \in C(U; \mathbb{S}^{d-1})$. Sind nun $\tilde{\phi} = (\widetilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ eine weitere Karte und $p \in U \cap \widetilde{U}$ im Überschneidungsbereich von ϕ und $\tilde{\phi}$, so ist $\det[J_{\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}}]\big(\varphi(p)\big) > 0$, da $\mathcal{A}$ orientiert ist. Nach Lemma II.3 ist dann $n(p,\tilde{\varphi}) = n(p,\phi)$, und $p \mapsto n(p,\phi)$ kann zu einer stetigen Abbildung auf ganz M fortgesetzt werden.

Sind umgekehrt $(p \mapsto n_p) \in C(M; \mathbb{S}^{d-1})$ ein stetiges Normaleneinheitsvektorfeld auf M, $\mathcal{A}$ ein Atlas von M und $\phi = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte daraus, so gilt entweder $n(p,\phi) = n_p$ oder $n(p,\phi) = -n_p$, für alle $p \in U$. Im Fall $n(p,\phi) = n_p$ setzen wir $\hat{\phi} := \phi$, und im Fall $n(p,\phi) = -n_p$ invertieren wir das Vorzeichen der ersten Koordinate in der Parametrisierung und definieren $\hat{\phi} = (U, \hat{\varphi})$ durch $\hat{\varphi}_1 := -\varphi_1$ und $\hat{\varphi}_2 := \varphi_2, \ldots, \hat{\varphi}_{d-1} := \varphi_{d-1}$. In beiden Fällen gilt dann $n(p,\hat{\phi}) = n_p$ für alle $p \in U$. Offensichtlich ist $\widehat{\mathcal{A}} := \{\hat{\phi} | \phi \in \mathcal{A}\}$ ein mit M verträglicher Atlas von M, und für je zwei Karten $\hat{\phi}_1 = (U_1, \hat{\varphi}_1), \hat{\phi}_2 = (U_2, \hat{\varphi}_2) \in \widehat{\mathcal{A}}$ mit $p \in U_1 \cap U_2$ ist dann $n(p,\hat{\phi}_1) = n_p = n(p,\hat{\phi}_2)$. Nach Lemma II.3 gilt also $\det[J_{\hat{\varphi}_2\circ\hat{\varphi}_1^{-1}}]\big(\hat{\varphi}_1(p)\big) > 0$, und $\widehat{\mathcal{A}}$ ist orientiert, d.h. M besitzt einen orientierbaren Atlas und ist somit orientierbar. □

II.2. Mannigfaltigkeiten mit Rand

Seien $m \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{H}^m := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{m-1} = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \;\Big|\; x_1 \geq 0\Big\} \tag{II.24}$$

$$\partial\mathbb{H}^m := \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} = \Big\{(0, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \;\Big|\; x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\Big\}. \tag{II.25}$$

Definition II.5. Seien $d, m \in \mathbb{N}$, $\widehat{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Atlas $\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{\phi}_i = (\widehat{U}_i, \hat{\varphi}_i) \mid i \in I\}$ und $\hat{\varphi}_i(\widehat{U}_i) =: \widehat{V}_i \subseteq \mathbb{R}^m$, für $i \in I$. Für $i \in I$ setzen wir

$$U_i := \hat{\varphi}_i^{-1}\big(\widehat{V}_i \cap \mathbb{H}^m\big), \quad \varphi_i := \hat{\varphi}_i\big|_{U_i}, \quad V_i := \varphi_i(U_i) = \widehat{V}_i \cap \mathbb{H}^m, \tag{II.26}$$

und

$$M := \bigcup_{i\in I} U_i. \tag{II.27}$$

(i) Die Familie $\mathcal{A} := \{\phi_i = (U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ bezeichnen wir als **berandeten Atlas von M**.

(ii) Seien $\mathcal{B} := \{\psi_j = (W_j, \psi_j) \mid j \in J\}$ ein anderer berandeter Atlas von M, wobei $W_j = \hat{\psi}_j^{-1}(\widehat{Z}_j \cap \mathbb{H}^m)$, $\psi_j = \hat{\psi}_j\big|_{W_j}$, $\widehat{Z}_j := \hat{\psi}_j(\widehat{W}_j) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\widehat{\mathcal{B}} := \{\hat{\psi}_j = (\widehat{W}_j, \hat{\psi}_j) | j \in J\}$ ein Atlas von $\widehat{M}$.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B} \text{ heißen } \textbf{verträglich} \\ :\Leftrightarrow\quad &\widehat{\mathcal{A}} \text{ und } \widehat{\mathcal{B}} \text{ sind verträglich.} \end{aligned} \tag{II.28}$$

(iii) Die Verträglichkeit (II.28) definiert eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller berandeter Atlanten von M. Eine zugehörige Äquivalenzklasse bezeichnen wir als **Mannigfaltigkeit mit Rand**.

(iv) Die Menge

$$\partial M \;:=\; \bigcup_{i\in I} \hat{\varphi}_i^{-1}\big(\widehat{V}_i \cap \partial\mathbb{H}^m\big) \;\subseteq\; \mathbb{R}^d \tag{II.29}$$

bezeichnen wir als **Rand von M**.

Lemma II.6. Seien $d, m \in \mathbb{N}$ und M eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{Z}_2^d$ mit Rand. Dann ist ∂M eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $m-1$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = \{\phi_i = (U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ ein berandeter Atlas von M. Setzen wir

$$\widetilde{V}_i \;:=\; \widehat{V}_i \cap \partial\mathbb{H}^m \;=\; \Big\{(x_1,\dots,x_m)^T \in \widehat{V}_i \;\Big|\; x_1 = 0\Big\}, \tag{II.30}$$

$$\widetilde{U}_i \;:=\; \hat{\varphi}_i^{-1}(\widetilde{V}) \;=\; \Big\{p \in U_i \;\Big|\; \big(\hat{\varphi}_i(p)\big)_1 = 0\Big\}, \tag{II.31}$$

$$\tilde{\varphi}_i \;:=\; \hat{\varphi}_i\big|_{\widetilde{U}_i}, \tag{II.32}$$

so ist $\tilde{\phi}_i := (\widetilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$ eine Karte von ∂M, denn $\tilde{\varphi}_i^{-1}(x) = \varphi_i^{-1}(0,x)$, für $x \in \mathbb{R}^{m-1}$, und für $p \in \widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j$, (also $p = \varphi_i^{-1}(0,x^{(i)}) = \varphi_j^{-1}(0,x^{(j)})$, für geeignete $x^{(i)}, x^{(j)} \in \mathbb{R}^{m-1}$) gilt

$$\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}(x^{(i)}) \;=\; \tilde{\varphi}_j\big(\varphi_i^{-1}(0,x^{(i)})\big) \;=\; \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(0,x^{(i)}), \tag{II.33}$$

was Verträglichkeit von $\tilde{\phi}_i$ und $\tilde{\phi}_j$ impliziert. □

Lemma II.7. Sind $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist ∂M orientierbar.

II.3. Der Gaußsche Satz

Definition II.8. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete, $(d-1)$-dimensionale, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit mit stetigen Normaleneinheitsvektorfeld $M \to \mathbb{S}^{d-1}$, $p \mapsto n_p$. Seien weiterhin $\varepsilon > 0$, $M(\varepsilon) := M + B(0,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^d$ und $F \in C(M;\mathbb{R}^d)$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_M \langle F(y)|n_y\rangle \, d\sigma(y) \tag{II.34}$$

Fluss des Feldes F durch M.

Definition II.9. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Sein Rand $\partial G = \overline{G} \setminus G^\circ$ heißt **zulässig**, falls es $N \in \mathbb{N}$ orientierte, eingebettete, $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten $(M_1,\mathcal{A}_1),\dots,(M_N,\mathcal{A}_N)$ so gibt, dass

$$\partial G \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{N} M_j. \tag{II.35}$$

Zeigen darüber hinaus die Normalenvektoren von M_j aus G heraus, d. h. gilt für $p \in \partial G \cap M_j$ und $\delta > 0$ genügend klein, dass

$$\delta\, n_p + p \;\notin\; G \qquad \text{und} \qquad -\delta\, n_p + p \;\in\; G, \tag{II.36}$$

so heißt ∂G **nach außen orientiert**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $d = 3$, $v_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ ein Geschwindigkeitsfeld und $\rho_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}_0^+)$ die Teilchendichte (Teilchen pro Volumen). Dann ist $j_t := \rho_t \cdot v_t \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ die Teilchenstromdichte. Ist M eine 2-dimensionale parametrisierte Hyperfläche, so ist

  $$J_t \;:=\; \int_M \big\langle j_t(y) \,\big|\, n_y \big\rangle \, d\sigma(y) \tag{II.37}$$

  die durch M fließende Teilchenzahl pro Zeiteinheit.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ und $Q := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$ ein offener Quader in $\mathbb{R}^d$. Dann ist Q durch seine *Deckelflächen*

  $$\partial Q \;=\; Q_1^{(li)} \cup Q_1^{(re)} \cup \ldots \cup Q_d^{(li)} \cup Q_d^{(re)} \tag{II.38}$$

  begrenzt, wobei

  $$\begin{aligned} Q_1^{(li)} &= \{a_1\} \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d], \\ Q_1^{(re)} &= \{b_1\} \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d], \\ &\vdots \\ Q_d^{(li)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{d-1}, b_{d-1}] \times \{a_d\}, \\ Q_d^{(re)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{d-1}, b_{d-1}] \times \{b_d\}. \end{aligned} \tag{II.39}$$

  Wählt man die kartesischen Koordinaten selbst zur Parametrisierung dieser Deckelflächen geeignet, so ist auf $Q_n^{(li)}$ das Normalenvektorfeld durch $b = -e_n$ und auf $Q_n^{(re)}$ durch $b = +e_n$ gegeben.

- Ein weiterer Typ leicht zu beschreibender zulässiger Gebiete ist der des Polytops. Seien dazu $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^d$ und $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{S}^{d-1}$. Für $n \in \mathbb{Z}_1^N$ beschreibt die Menge

  $$G_n \;:=\; \big\{ p \in \mathbb{R}^d \,\big|\, \langle p - a_n | n_n \rangle < 0 \big\} \tag{II.40}$$

  den Halbraum aller Punkte auf einer Seite der Hyperebene E_n, auf der n_n senkrecht steht und die a_n enthält. Dabei weist n_n aus diesem Halbraum heraus. Ein endlicher Schnitt

  $$G \;=\; G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_N \tag{II.41}$$

  solcher Halbräume bezeichnen wir als **Polytop**. Der Rand des Polytops ist gegeben durch

  $$\partial G \;=\; \partial G_1 \cup \partial G_2 \cup \cdots \cup \partial G_N, \tag{II.42}$$

  wobei $\partial G_n = E_n \cap \overline{G}$.

- Die Definition II.9 eines zulässigen Gebiets ist vom Beispiel des Polytops abstrahiert. Im Allgemeinen lässt sich der Rand eines Gebietes nicht so einfach als "Deformation" eines Polytops charakterisieren. Beispielsweise kann ein Gebiet auch Einschlüsse ($d = 3$, Schweizer Käse) oder Löcher ($D = 2, 3$) haben.

Definition II.10. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $g \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die **Divergenz** $\nabla \cdot \mathbf{g} \in C(G; \mathbb{R})$ von g durch

$$\nabla \cdot g \;\equiv\; \operatorname{div}(g) \;:=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial g_j}{\partial p_j}. \tag{II.43}$$

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Gaußschen Satzes:

$$\int_{\partial G} \big\langle g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_G \nabla \cdot g(p) \, d^d p. \tag{II.44}$$

Dabei ist $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit zulässigem, nach außen orientiertem Rand ∂G.

Wir beweisen diesen Satz zunächst exemplarisch für einen beliebigen Quader Q.

Lemma II.11. Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, $Q := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$ ein offener, nach außen orientierter Quader in $\mathbb{R}^d$ und $Q(\varepsilon) := Q + B(0, \varepsilon)$ die offene ε-Umgebung von Q. Sei weiterhin $\varepsilon > 0$ und $g \in C^1(Q(\varepsilon); \mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$\int_{\partial Q} \big\langle g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_Q \nabla \cdot g(p) \, d^d p. \tag{II.45}$$

Beweis. Der Rand ∂Q von Q ist gemäß (II.39) durch die Deckelflächen $Q_1^{(li)} \cup Q_1^{(re)} \cup \ldots \cup Q_d^{(li)} \cup Q_d^{(re)}$ gegeben. Wählt man die kartesischen Koordinaten selbst zur Parametrisierung dieser Deckelflächen geeignet, so ist auf $Q_n^{(li)}$ das Normalenvektorfeld durch $b = -e_n$ und auf $Q_n^{(re)}$ durch $b = +e_n$ gegeben. Also ist

$$\begin{aligned} &\int_{\partial Q} \Big\langle g(p) \;\Big|\; n_p \Big\rangle \, d\sigma(p) \qquad\qquad (\text{II.46}) \\ &\quad= \sum_{n=1}^{m} \left(\int_{Q_n^{(li)}} \Big\langle g(p) \Big| (-e_n) \Big\rangle \, d^{d-1} p \;+\; \int_{Q_n^{(re)}} \Big\langle g(p) \;\Big|\; e_n \Big\rangle \, d^{d-1} p \right) \\ &\quad= \sum_{n=1}^{m} \left(\int_{Q_n^{(re)}} g_n(p) \, d^{d-1} p \;-\; \int_{Q_n^{(li)}} g_n(p) \, d^{d-1} p \right). \end{aligned}$$

Für $n = 1$, beispielsweise, ist

$$\begin{aligned} &\int_{Q_1^{(re)}} g_1(p) \, d^{d-1} p \;-\; \int_{Q_1^{(li)}} g_1(p) \, d^{d-1} p \qquad\qquad (\text{II.47}) \\ &\quad= \int_{[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_d,b_d]} \big\{ g_1(b_1, p_2, \ldots, p_d) \;-\; g_1(a_1, p_2, \ldots, p_d) \big\} \, dp_2 \cdots dp_d \\ &\quad= \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_d,b_d]} \frac{\partial g_1}{\partial p_1}(p_1, p_2, \ldots, p_d) \, dp_1 \, dp_2 \cdots dp_d. \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für $n = 2, \ldots, d$. Summieren wir die Ergebnisse auf, so erhalten wir (II.45). □

Als nächste Vorbereitung beweisen wir den Gaußschen Satz für ein beliebiges Polytop G.

Lemma II.12. Seien $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^d$ und $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{S}^{d-1}$. Seien damit $G_n := \big\{p \in \mathbb{R}^d \big| \langle p - a_n | n_n\rangle < 0\big\}$, für $n \in \mathbb{Z}_1^N$, und $G = G_1 \cap \cdots \cap G_N$ sowie $G(\varepsilon) := G + B(0,\varepsilon)$ die offene ε-Umgebung von G. Ist $g \in C^1(G(\varepsilon); \mathbb{R}^d)$ von beschränktem Träger, d.h. für einen genügend großen Quader Q verschwindet g auf Q^c, so ist

$$\int_{\partial G} \big\langle g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_G \nabla \cdot g(p) \, d^d p. \tag{II.48}$$

Beweis. Wir definieren $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ durch

$$f(\lambda) \;:=\; \frac{1}{1+e^\lambda}. \tag{II.49}$$

Beachte, dass

$$\lim_{\delta \to 0} f(\lambda/\delta) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \lambda = 0, \\ 1, & \text{falls } \lambda < 0, \end{cases} \tag{II.50}$$

und dass

$$f'(\lambda) \;=\; \frac{-e^\lambda}{(1+e^\lambda)^2} \;=\; \frac{-2}{[\cosh(\lambda/2)]^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\, d\lambda \;=\; -1; \tag{II.51}$$

letzteres nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Für $\delta > 0$, $n \in \mathbb{Z}_1^N$ und $p \in \mathbb{R}^d$ setzen wir nun

$$F_{\delta,n}(p) \;:=\; f\Big(\delta^{-1} \langle p - a_n | n_n \rangle\Big), \qquad F_\delta(p) \;:=\; F_{\delta,1}(p) \cdot F_{\delta,2}(p) \cdots F_{\delta,N}(p), \tag{II.52}$$

und beobachten, dass wegen (II.50)

$$\lim_{\delta \to 0} F_{\delta,n} \;:=\; \mathbb{1}_{G_n} \;+\; \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{E_n}, \tag{II.53}$$

und daher mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_G \nabla \cdot g(p)\, d^d p \;&=\; \int_{G \cap Q} \nabla \cdot g(p)\, d^d p \;=\; \int_Q \Big(\lim_{\delta \to 0} F_\delta(p) \Big) \, \nabla \cdot g(p)\, d^d p \\ &= \lim_{\delta \to 0} \int_Q F_\delta(p)\, \nabla \cdot g(p)\, d^d p. \end{aligned} \tag{II.54}$$

Nun wenden wir Lemma II.11 auf das Vektorfeld $F_\delta \cdot g$ und den Quader Q an. Da $F_\delta \cdot g$ außerhalb von Q und auf ∂Q verschwindet, gibt (II.45), dass

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_{\partial Q} \big\langle F_\delta \cdot g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_Q \nabla \cdot \big(F_\delta \cdot g\big)(p)\, d^d p \\ &= \int_Q \big\langle \nabla F_\delta(p) \big| g(p) \big\rangle \, d^d p \;+\; \int_Q F_\delta(p)\, \big(\nabla \cdot g\big)(p)\, d^d p. \end{aligned} \tag{II.55}$$

Somit ist

$$\int_G \nabla \cdot g(p)\, d^d p \;=\; -\lim_{\delta\to 0} \int \big\langle \nabla F_\delta(p) \big| g(p) \big\rangle\, d^d p. \tag{II.56}$$

Aus der Produktregel und der Kettenregel erhalten wir

$$\nabla F_\delta(p) \;=\; \sum_{n=1}^N \nabla F_{\delta,n}(p) \prod_{\nu\neq n} F_{\delta,\nu}(p) \;=\; \sum_{n=1}^N \frac{n_n}{\delta}\, f'\Big(\delta^{-1}\langle p-a_n|n_n\rangle\Big) \prod_{\nu\neq n} F_{\delta,\nu}(p) \tag{II.57}$$

und somit

$$\int \big\langle \nabla F_\delta(p) \big| g(p) \big\rangle\, d^d p \;=\; \sum_{n=1}^N \frac{1}{\delta} \int f'\Big(\delta^{-1}\langle p-a_n|n_n\rangle\Big) \prod_{\nu\neq n} F_{\delta,\nu}(p)\, \langle n_n|g(p)\rangle\, d^d p. \tag{II.58}$$

Im n. Integral verschieben wir durch $p \mapsto y := p - a_n$ nun den Ursprung in den Punkt a_n und drehen $y \mapsto z := R_n^T y$ das Koordinatensystem mit Hilfe einer Drehmatrix $R_n \in \mathrm{SO}(d)$ so, dass $R_n^T n_n = e_1$ und insbesondere

$$\langle p-a_n|n_n\rangle \;=\; \langle y|n_n\rangle \;=\; \langle R_n z|n_n\rangle \;=\; \langle z|R_n^T n_n\rangle \;=\; \langle z|e_1\rangle \;=\; z_1. \tag{II.59}$$

Setzen wir nun

$$\tilde g_{\delta,n}(z) \;:=\; \prod_{\nu\neq n} F_{\delta,\nu}(a_n + R_n z)\, \langle n_n|g(a_n+R_n z)\rangle \tag{II.60}$$

und beachten, dass

$$\lim_{\delta\to 0} \tilde g_{\delta,n}(z) \;=\; \Big\{ \prod_{\nu\neq n} \big(\mathbb{1}_{G_n} + \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{E_n}\big) \Big\}\, \langle n_n|g(a_n+R_n z)\rangle, \tag{II.61}$$

so folgt abermals mit majorisierter Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \int \big\langle \nabla F_\delta(p) \big| g(p) \big\rangle\, d^d p \;&=\; \sum_{n=1}^N \lim_{\delta\to 0} \int \frac{f'(z_1/\delta)}{\delta}\, \tilde g_{\delta,n}(z_1,z_2,\ldots,z_d)\, dz_1\, dz_2 \cdots dz_d \\
&=\; \sum_{n=1}^N \lim_{\delta\to 0} \int f'(\tilde z_1)\, \tilde g_{\delta,n}(\delta\tilde z_1, z_2,\ldots,z_d)\, d\tilde z_1\, dz_2\cdots dz_d \qquad \text{(II.62)} \\
&=\; \sum_{n=1}^N \Big(\int f'(\tilde z_1)\, d\tilde z_1 \Big) \Big(\int_{\partial \mathbb{H}^{d-1} \cap R_n(\widetilde G_n - a_n)} \langle n_n|g(a_n+R_n z)\rangle\, dz_2\cdots dz_d \Big),
\end{aligned}$$

wobei $\widetilde G_n := G_1 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap G_{n+1} \cap G_N$. Daher erhalten wir nach Rücktransformation $z \mapsto p := a_n + R_n z$, dass

$$\int_G \nabla \cdot g(p)\, d^d p \;=\; \sum_{n=1}^N \int_{E_n \cap \widetilde G_n} \langle n_n|g(p)\rangle\, d\sigma(p) \;=\; \int_{\partial G} \langle n_n|g(p)\rangle\, d\sigma(p). \tag{II.63}$$

□

Wir kommen nun zum Gaußschen Satz:

Satz II.13 (Gaußscher Satz)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\partial\mathcal{G}$ eine zulässige, nach außen orientierte parametrisierte Hyperfläche der Dimension $d-1$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $g \in C^1(\mathcal{G}(\varepsilon); \mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$\int_{\partial\mathcal{G}} \big\langle g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p) \;=\; \int_{\mathcal{G}} \nabla \cdot g(p) \, d^d p. \tag{II.64}$$

Beweis. Den Beweis des Gaußschen Satzes führen wir hier nicht, sondern skizzieren nur die Beweisschritte:

- Zunächst wählen wir zu $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $p_1, \dots p_L \in \partial G$ so, dass es zu jedem Punkt $p \in \partial G$ ein $\ell \in \mathbb{Z}_1^L$ gibt, mit $\|p - p_\ell\| \leq \varepsilon$. Nun approximieren wir ∂G durch kleine Hyperebenenstücke, die durch die Punkte $p_1, \dots, p_L$ aufgespannt werden.
- Das Gebiet G ersetzen wir durch das innere, den Normalenvektoren abgewandte Gebiet G_ε, das durch diese Hyperebenenstücke ∂G_ε eingeschlossen wird. Im Limes $\varepsilon \to 0$ kann man in (II.64) G durch G_ε und ∂G durch ∂G_ε ersetzen.
- Das Gebiet G_ε zerlegen wir nun durch geeignete Schnitte in endlich viele paarweise disjunkte konvexe Polytope $P_\varepsilon^{(1)}, \dots, P_\varepsilon^{(K)}$, d.h. $G_\varepsilon = P_\varepsilon^{(1)} \cup \dots \cup P_\varepsilon^{(K)}$ und $P_\varepsilon^{(i)} \cap P_\varepsilon^{(j)} = \emptyset$, für $i \neq j$.
- Auf jedes dieser Polytope wenden wir Lemma II.12 an und beachten, dass sich die Integrale $\int_{\partial P_\varepsilon^{(i)}} \big\langle g(p) \big| n_p \big\rangle \, d\sigma(p)$ für gemeinsame Randflächen benachbarter Polytope gerade wegheben.
- So erhalten wir in Summe die Behauptung für das Gebiet G_ε und im Limes $\varepsilon \to 0$ auch für G.

□

II.4. Stokesscher Satz in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Für die Formulierung des Stokeschen Satzes brauchen wir eine Verschärfung des Begriffs einer zusammenhängenden Menge.

Definition II.14. Ein topologischer Raum $(M, \mathfrak{T})$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jeder geschlossene Weg $\eta \in C\big([0,1]; M\big)$ in M, $\eta_0 = \eta_1$, stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt, d.h. es existiert eine Schar $\big(\gamma^{(\alpha)}\big)_{\alpha\in[0,1]}$ geschlossener Wege $\gamma_{(\cdot)}^{(\cdot)} \in C\big([0,1]\times[0,1]; M\big)$, sodass

$$\forall t \in [0,1]: \quad \gamma_t^{(0)} \;=\; \eta_0, \tag{II.65}$$

$$\forall \alpha \in [0,1]: \quad \gamma_0^{(\alpha)} \;=\; \gamma_1^{(\alpha)} \;=\; \eta_0, \tag{II.66}$$

$$\forall t \in [0,1]: \quad \gamma_t^{(1)} \;=\; \eta_t. \tag{II.67}$$

Satz II.15 (Stokesscher Satz in $\mathbb{R}^2$)**.** Seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zulässiges, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$ sowie $G(\varepsilon) := G + B(0,\varepsilon)$. Seien $g \in C^1\big(G(\varepsilon);\mathbb{R}^2\big)$ ein Feld und

$$\nabla \wedge g(p) \;:=\; \operatorname{rot} g(p) \;:=\; \frac{\partial g_2}{\partial p_1} \;-\; \frac{\partial g_1}{\partial p_2}. \tag{II.68}$$

Dann ist

$$\int_G \nabla \wedge g(p)\, d^2p \;=\; \int_{\partial G} g(p) \cdot d\sigma(p). \tag{II.69}$$

Beweis. Wir definieren für $g(p) = \big(g_1(p), g_2(p)\big)^T$

$$f(p) \;:=\; \begin{pmatrix} g_2(p) \\ -g_1(p) \end{pmatrix}. \tag{II.70}$$

Dann ist $f \in C^1\big(G(\varepsilon);\mathbb{R}^2\big)$ und außerdem ist

$$\nabla \cdot f \;=\; \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \;+\; \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \;=\; \frac{\partial g_2}{\partial p_1} \;-\; \frac{\partial g_1}{\partial p_2} \;=\; \nabla \wedge g. \tag{II.71}$$

Weiterhin ist ∂G orientiert, und zwar mit unserer Konvention gegen den Uhrzeigersinn. Darüber hinaus nehmen wir an, dass $\gamma \in C^1\big([0,1];\mathbb{R}^2\big)$ eine geschlossene, doppelpunktsfreie Parametrisierung von ∂G ist, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1) \in \partial G$, γ injektiv und $\gamma\big([0,1]\big) = \partial G$. (Hier geht ein, dass G einfach zusammenhängend ist und keine "Löcher" in G weitere Komponenten des Randes von G erzeugen.) Für $t \in [0,1]$ ist dann

$$b_{\gamma(t)} \;=\; \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix}. \tag{II.72}$$

Wenden wir nun den Gaußschen Satz auf f an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_G \nabla \wedge g(p)\, d^2p \;&=\; \int_G \nabla \cdot f(p)\, d^2p \;=\; \int_{\partial G} \big\langle f(p) \big| n_p \big\rangle\, d\sigma(p) \;=\; \int_0^1 \Big\langle f[\gamma(t)] \Big| b_{\gamma(t)} \Big\rangle\, dt \\ &=\; \int_0^1 \Big\{ g_2[\gamma(t)]\dot\gamma_2(t) \;+\; g_1[\gamma(t)]\dot\gamma_1(t) \Big\}\, dt \;=\; \int_0^1 \Big\langle g[\gamma(t)] \Big| \dot\gamma(t) \Big\rangle\, dt \\ &=\; \int_{\partial G} g(p) \cdot d\sigma(p) \end{aligned} \tag{II.73}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- In $\mathbb{R}^2$ ist $\nabla \wedge g$ kein Vektor, sondern eine Zahl. Den Zusammenhang zwischen $\nabla \wedge g$ für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\nabla \wedge g$ für $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann man eigentlich nur mit Differentialformen verstehen. Als Differentialform ist $\nabla \wedge g$ nämlich eine *2-Form*, unabhängig von der Dimension D.

- Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ ist also eine einfache Folgerung aus dem Satz von Gauß in $\mathbb{R}^2$.
- Die Annahme im Beweis, dass es mit $\gamma \in C^1\big([0,1];\mathbb{R}^2\big)$ eine geschlossene, doppelpunktsfreie Parametrisierung von ∂G gibt, fußt auf der Annahme, dass G einfach zusammenhängend ist und keine "Löcher" in G weitere Komponenten des Randes von G erzeugen.

Für die erste Anwendung des Stokesschen Satzes in der Physik erinnern wir nochmals an die Definition eines konservativen Kraftfeldes

Definition II.16. Ein Vektorfeld $g \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ heißt **konservativ**

$$:\Leftrightarrow \forall \gamma \in C^1\big([0;1],\mathbb{R}^2\big),\ \gamma(0)=\gamma(1),\ \|\dot\gamma\|>0: \quad \int_{\gamma([0,1])} g(p)\cdot d\sigma(p) \ = \ 0. \tag{II.74}$$

Insbesondere sind Potentialfelder, also Vektorfelder, die sich als Gradient $g=\nabla\phi$ einer reellwertigen Funktion ϕ schreiben lassen, konservativ. Wir wollen nun zeigen, dass diese Eigenschaft äquivalent zur **Wirbelfreiheit** $\nabla\wedge g=0$ des Vektorfeldes g ist.

Satz II.17. Sei $g\in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$g \text{ ist konservativ} \tag{II.75}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\phi\in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}): \quad g \ = \ \nabla\phi \tag{II.76}$$

$$\Leftrightarrow \quad g \text{ ist } \textbf{wirbelfrei}, \text{ d.h. } \forall p\in\mathbb{R}^2:\ \nabla\wedge g(p)=0. \tag{II.77}$$

Beweis.
(II.76) $\Rightarrow$ (II.75): Ist $\gamma\in C^1\big([0;1],\mathbb{R}^2\big)$, mit $\gamma(0)=\gamma(1)$, $\|\dot\gamma\|>0$ und $\Gamma:=\gamma([0,1])$ ein geschlossener Weg, so ist

$$\begin{aligned}\int_\Gamma g(p)\cdot d\sigma(p) \ &= \ \int_0^1 \Big\langle g[\gamma(t)]\Big|\dot\gamma(t)\Big\rangle\, dt \ = \ \int_0^1 \Big\langle \nabla\phi[\gamma(t)]\Big|\dot\gamma(t)\Big\rangle\, dt \\ &= \ \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\Big[\phi[\gamma(t)]\Big]\right) dt \ = \ \phi[\gamma(1)]-\phi[\gamma(0)] \ = \ 0.\end{aligned} \tag{II.78}$$

und g ist konservativ.

(II.75) $\Rightarrow$ (II.77): Sei $p\in\mathbb{R}^2$ irgendein vorgegebener Punkt und $G:=B(p,\delta)$ die Kugel um p vom Radius $\delta>0$. Nach dem Stokesschen Satz gilt

$$0 \ = \ \int_{\partial G} g(y)\cdot d\sigma(y) \ = \ \int_G \nabla\wedge g(y)\, d^2y, \tag{II.79}$$

da g konservativ ist. Nun ist $g\in C^1$, und $\nabla\wedge g$ ist somit stetig in p, daher gilt

$$\nabla\wedge g(p) \ = \ \lim_{\delta\to 0}\left\{\ \frac{1}{\pi\,\delta^2}\ \int_G \nabla\wedge g(y)\, d^2y\right\} \ = \ 0. \tag{II.80}$$

Da $p \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, ist somit g wirbelfrei.

(II.77) $\Rightarrow$ (II.76): Sei g wirbelfrei, dann gilt also für $j,k \in \{1,2\}$:

$$\frac{\partial g_k(p)}{\partial p_j} \;=\; \frac{\partial g_j(p)}{\partial p_k}. \tag{II.81}$$

Wir wählen $z \in \mathbb{R}^2$ beliebig, aber fest, und setzen (unter der Vorgabe, dass $\phi(z) = 0$ sein soll)

$$\phi(p) \;:=\; \int_0^1 \Big\langle g\big(z + t(p-z)\big) \Big| (p-z) \Big\rangle \, dt. \tag{II.82}$$

Nun berechnen wir $\nabla\phi(p)$ (mit $d = 2$),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(p)}{\partial p_k} \;&=\; \int_0^1 \sum_{j=1}^{d} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_k} \Big\langle g\big(z + t(p-z)\big) \Big| (p-z) \Big\rangle \right\} dt \\
&=\; \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{d} \left\{ \Big\langle \frac{\partial g_j\big(z + t(p-z)\big)}{\partial p_k} \Big| t(p_j - z_j) \Big\rangle \right\} \;+\; g_k\big(z + t(p-z)\big) \right) dt \\
&=\; \int_0^1 \left(t\, \frac{d}{dt} \Big[\partial g_k\big(z + t(p-z)\big) \Big] \;+\; g_k\big(z + t(p-z)\big) \right) dt \qquad \text{(II.83)} \\
&=\; \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \Big[t\; g_k\big(z + t(p-z)\big) \Big] \right) dt \;=\; \Big[t\; g_k\big(z + t(p-z)\big) \Big]_0^1 \;=\; g_k(p).
\end{aligned}$$

Also ist $\nabla\phi = g$. Da $g \in C^1$, ist auch $\phi \in C^2$. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein nicht notwendig einfach zusammenhängendes Gebiet, $g \in C^1\big(G; \mathbb{R}^3\big)$ wirbelfrei (d.h. $\nabla \wedge g(p) = 0$, für alle $p \in G$), so ist g auch nicht notwendig konservativ.
- Dies illustrieren wir an folgendem Beispiel: Sind $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $g(p) := \big(-p_2|p|^{-1}\,,\, p_1|p|^{-1} \big)$, für $p \in G$. Dann ist, für alle $p \in G$,

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge g(p) \;&=\; \frac{\partial g_2}{\partial p_1} \;-\; \frac{\partial g_1}{\partial p_2} \;=\; \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \right) \;+\; \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \right) \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \;-\; \frac{p_1^2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}^{\,3}} \;+\; \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \;-\; \frac{p_2^2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}^{\,3}} \;=\; 0. \qquad \text{(II.84)}
\end{aligned}$$

  Der Rand ∂D von $D := \{z : \; 0 < |z| < 1\}$ wird parametrisiert durch $\gamma \in C^\infty\big([0, 2\pi]; G\big)$,

$$\gamma_t \;:=\; \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_t \;:=\; \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \tag{II.85}$$

und dem Punkt 0, d.h. $\partial D = \gamma\big([0,2\pi]\big) \cup \{0\}$. Der Punkt 0 liefert aber keinen Beitrag zu den Integralen, deshalb ist

$$\int_{\partial D} g(p) \cdot d^1\sigma(p) \;=\; \int_{t=0}^{2\pi} \big\langle g(\gamma_t) \,\big|\, \dot\gamma_t \big\rangle \, dt \;=\; \int_{t=0}^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_{t=0}^{2\pi} 1 \, dt \;=\; 2\pi \;\neq\; 0 \;=\; \int_{D\setminus\{0\}} \nabla \wedge g(p) \, d^2p. \tag{II.86}$$

- Als Nächstes erinnern wir an die Definition der Rotation eines Vektorfeldes im $d = 2$ Dimensionen:

$$\forall g \in C^1\big(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2\big): \quad \nabla \wedge g(p) \;:=\; \partial_1 g_2(p) - \partial_2 g_1(p) \;:=\; \frac{\partial g_2(p)}{\partial p_1} - \frac{\partial g_1(p)}{\partial p_2}. \tag{II.87}$$

  Es ist also $\nabla \wedge g \in C^0(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

- Im Gegensatz dazu ist in drei Dimensionen die Rotation von g wie folgt definiert:

$$\forall g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \;: \quad \nabla \wedge g(p) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix}. \tag{II.88}$$

  Es ist dann also $\nabla \wedge g \in C^0(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. Wir bemerken hier, dass auch für $d = 3$ gilt:

$$g \text{ wirbelfrei} \quad :\Leftrightarrow \quad \nabla \wedge g \;\equiv\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i,j: \;\; \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \;\equiv\; \frac{\partial g_j}{\partial p_i}. \tag{II.89}$$

Wir können nun auch die Folgerung über konservative Kraftfelder auf den 3-dimensionalen Fall übertragen:

Satz II.18. Seien $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $g \in C^1(G;\mathbb{R}^3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$g \text{ ist konservativ;} \tag{II.90}$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists \phi \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}): \quad g \;=\; \nabla\phi; \tag{II.91}$$
$$\Leftrightarrow \quad g \text{ ist wirbelfrei.} \tag{II.92}$$

Beweis. Analog zu Satz II.17. □

Auch die Verallgemeinerung des Stokesschen Satzes in $\mathbb{R}^2$ auf 2-dimensionale, in $\mathbb{R}^3$ eingebettete Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt nur unter der Annahme, dass M einfach zusammenhängend ist. Weniger wichtig ist hingegen, dass der Rand ∂M selbst eine Mannigfaltigkeit ist; der Stokessche Satz in $\mathbb{R}^3$ lässt sich auch auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, die sich selbst oder deren Rand sich aus endlich vielen C^2-Stücken zusammensetzt.

Satz II.19 (Stokesscher Satz im $\mathbb{R}^3$)**.** Sind $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, eingebettete, einfach zusammenhängende, orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $g \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist

$$\int_M \big\langle \nabla \wedge g(p) \big| n_p \big\rangle \, d^2\sigma(p) \;=\; \int_{\partial M} g(p) \cdot d^1\sigma(p). \tag{II.93}$$

II.5. Ergänzungen

II.5.1. Norm des Normalenvektors und Gramsche Determinante

Beweis von (II.7) Wir bemerken zunächst, dass

$$g_\psi(u) \;=\; \det[G(\psi,u)] \;=\; \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \langle v_{\sigma(1)}|v_1\rangle \cdots \langle v_{\sigma(d-1)}|v_{d-1}\rangle \tag{II.94}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_{d-1}=1}^{d} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \; v^{j_1}_{\sigma(1)}\, v^{j_1}_1 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1}.$$

Tatsächlich tragen nur Terme zur letzten Summe in (II.94) bei, für die alle $j_1,\ldots,j_{d-1}$ paarweise verschieden sind. Ist nämlich z. B. $j_1 = j_2 =: k$, so ist

$$\begin{aligned}
X \;&:=\; \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \; v^{j_1}_{\sigma(1)}\, v^{j_1}_1\, v^{j_2}_{\sigma(2)}\, v^{j_2}_2\, v^{j_3}_{\sigma(3)}\, v^{j_3}_3 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \; v^{k}_{\sigma(1)}\, v^{k}_1\, v^{k}_{\sigma(2)}\, v^{k}_2\, v^{j_3}_{\sigma(3)}\, v^{j_3}_3 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \; v^{k}_{\sigma(2)}\, v^{k}_1\, v^{k}_{\sigma(1)}\, v^{k}_2\, v^{j_3}_{\sigma(3)}\, v^{j_3}_3 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma \; v^{k}_{\sigma\circ\tau(1)}\, v^{k}_1\, v^{k}_{\sigma\circ\tau(2)}\, v^{k}_2\, v^{j_3}_{\sigma\circ\tau(3)}\, v^{j_3}_3 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma\circ\tau(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1} \\
&= -\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^{\sigma\circ\tau} \; v^{k}_{\sigma\circ\tau(1)}\, v^{k}_1\, v^{k}_{\sigma\circ\tau(2)}\, v^{k}_2\, v^{j_3}_{\sigma\circ\tau(3)}\, v^{j_3}_3 \;\cdots\; v^{j_{d-1}}_{\sigma\circ\tau(d-1)}\, v^{j_{d-1}}_{d-1} \\
&= -X \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{II.95}$$

wobei $\tau : (1,2,3,\ldots,d-1) \mapsto (2,1,3,\ldots,d-1)$ die Transposition der ersten beiden Elemente notiert. Wir können die Summation in (II.94) also auf die $d-1$-Tupel $(j_1,\ldots,j_{d-1})$ restringieren, die eine $d-1$-elementige Teilmenge von $\mathbb{Z}_1^d$ sind. Sind aber $j_1,\ldots,j_{d-1}$ festgelegt, dann ist auch das übrigbleibende Element in $\mathbb{Z}_1^d \setminus \{j_1,\ldots,j_{d-1}\}$ determiniert. Wir können daher die Summation über $j_1,\ldots,j_{d-1}$ als Summation über alle Permutationen in $\mathcal{S}_d$ auffassen und erhalten

$$g(p,\phi) \;=\; \sum_{\pi\in\mathcal{S}_d} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{d-1}} (-1)^\sigma v^{\pi(1)}_{\sigma(1)}\, v^{\pi(1)}_1 \;\cdots\; v^{\pi(d-1)}_{\sigma(d-1)}\, v^{\pi(d-1)}_{d-1} \tag{II.96}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{\pi,\sigma\in\mathcal{S}_d \\ \pi(d)=j,\sigma(d)=d}} (-1)^\sigma \; v^{\pi(1)}_{\sigma(1)}\, v^{\pi(1)}_1 \;\cdots\; v^{\pi(d-1)}_{\sigma(d-1)}\, v^{\pi(d-1)}_{d-1}.$$

Mit der Variablensubstitution $\kappa := \pi \circ \sigma^{-1}$ und unter Beachtung, dass damit $(-1)^\sigma = (-1)^\pi \cdot (-1)^\kappa$ gilt, ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} g(p,\phi) &= \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{\pi,\sigma\in\mathcal{S}_d \\ \pi(d)=\kappa(d)=j}} (-1)^\pi \cdot (-1)^\kappa \, v_1^{\pi(1)} \, v_1^{\kappa(1)} \, \cdots \, v_{d-1}^{\pi(d-1)} \, v_{d-1}^{\kappa(d-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{d} b_j \, b_j \;=\; \big\langle b(p,\phi) \,\big|\, b(p,\phi) \big\rangle \end{aligned} \tag{II.97}$$

und somit (II.7).

II.5.2. Beweis des Stokesschen Satzes in $\mathbb{R}^3$

Lemma II.20. Wir definieren das **total antisymmetrische Symbol** $\epsilon : \mathbb{Z}_1^3 \times \mathbb{Z}_1^3 \times \mathbb{Z}_1^3 \to \mathbb{Z}$ durch

$$\epsilon_{i,j,k} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \\ & \text{und } (1,2,3) \mapsto (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation ist,} \\ -1 & \text{falls } \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \\ & \text{und } (1,2,3) \mapsto (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation ist,} \\ 0 & \text{falls } i=j \text{ oder } j=k \text{ oder } i=k \text{ gilt.} \end{cases} \tag{II.98}$$

Dann gelten

$$\forall A = (a_{i,j})_{i,j=1}^3 \in \mathfrak{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \quad \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \, a_{1,i} \, a_{2,j} \, a_{3,k} \;, \tag{II.99}$$

$$\forall i,j,\ell,m \in \mathbb{Z}_1^3 : \quad \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \, \epsilon_{\ell,m,k} \;=\; \big(1-\delta_{i,j}\big)\big(\delta_{i,\ell}\,\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\,\delta_{j,\ell}\big). \tag{II.100}$$

Beweis. Glg. (II.99) folgt trivial aus dem Leibnizschen Entwicklungssatz.

(II.100): Dazu beobachten wir, dass $\epsilon_{i,j,k}\,\epsilon_{\ell,m,k} \neq 0$ bedingt, dass $i \neq j$, $\ell \neq m$ und $\{i,j\} = \mathbb{Z}_1^3 \setminus \{k\} = \{\ell,m\}$ gelten. Also gibt es zwei Fälle:

- Sind $i=\ell$ und $j=m$, so ist $\epsilon_{i,j,k}\,\epsilon_{\ell,m,k} = \epsilon_{i,j,k}^2 = 1$. Die Summation über i liefert diesen Beitrag genau einmal, nämlich wenn $k \in \mathbb{Z}_1^3 \setminus \{i,j\}$.
- Sind $i=m$ und $j=\ell$, so ist $\epsilon_{i,j,k}\,\epsilon_{\ell,m,k} = -1$. Auch liefert die Summation über k diesen Beitrag genau einmal, nämlich wenn $k \in \mathbb{Z}_1^3 \setminus \{i,j\}$.

□

Beweis von Satz II.19: Wir nehmen vereinfachend an, dass M durch eine einzige Parametrisierung $\psi \in C^2(G;\mathbb{R}^3)$ gegeben ist, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenängend ist und $M = \psi(G)$, also dass $\{\phi = (M, \psi^{-1})\}$ ein Atlas von M ist. Wir schreiben $v_\alpha(x) := v_\alpha\big(\psi(x),\phi\big)$.

Wir definieren $f \in C^1(G;\mathbb{R}^2)$ durch

$$f(x) \;:=\; \begin{pmatrix} \big\langle g[\psi(x)]\big|v_1(x)\big\rangle \\ \big\langle g[\psi(x)]\big|v_2(x)\big\rangle \end{pmatrix}, \tag{II.101}$$

also, für $x \in G$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_1^2$,

$$f_\alpha(x) \;:=\; \sum_{i=1}^{3} g_i[\psi(x)]\;\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_\alpha}, \tag{II.102}$$

und beobachten, dass

$$\begin{aligned}
\nabla\wedge f(x) \;&=\; \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\
&=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg(g_i[\psi(x)]\;\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_2}\bigg) \;-\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_2}\bigg(g_i[\psi(x)]\;\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_1}\bigg) \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3} \bigg\{ \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(g_i[\psi(x)]\Big)\Big]\;\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_2} \;-\; \Big[\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(g_i[\psi(x)]\Big)\Big]\;\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_1}\bigg\} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3} \bigg(\frac{\partial g_i[\psi(x)]}{\partial x_j}\bigg)\bigg(\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_2}\;\frac{\partial\psi_j(x)}{\partial x_1} \;-\; \frac{\partial\psi_i(x)}{\partial x_1}\;\frac{\partial\psi_j(x)}{\partial x_2}\bigg) \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\partial_i g_j[\psi(x)] - \partial_j g_i[\psi(x)]\Big)\; v_1^i(x)\; v_2^j(x).
\end{aligned} \tag{II.103}$$

Für $x = \psi(x) \in M$, $x = (x_1,x_2)^T \in G$ sind dann andererseits der Normalenvektor $b(p,\phi) = (b_1,b_2,b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und die Rotation von g gegeben durch

$$b_k(p,\phi) \;=\; \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\; v_1^i(x)\; v_2^j(x), \tag{II.104}$$

$$(\nabla\wedge g)_k(p) \;=\; \sum_{\ell,m=1}^{3} \epsilon_{\ell,m,k}\;\partial_\ell g_m(p). \tag{II.105}$$

Nach (II.100) ist dann also

$$\begin{aligned}
\big\langle \nabla\wedge g(p)\big|b(p,\phi)\big\rangle \;&=\; \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{\ell,m=1}^{3}\bigg(\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{i,j,k}\;\epsilon_{\ell,m,k}\bigg)\partial_\ell g_m(p)\; v_1^i(x)\; v_2^j(x) \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{\ell,m=1}^{3}\big(1-\delta_{i,j}\big)\big(\delta_{i,\ell}\,\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\,\delta_{j,\ell}\big)\,\partial_\ell g_m(p)\; v_1^i(x)\; v_2^j(x) \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3}\big(1-\delta_{i,j}\big)\big(\partial_i g_j(p) - \partial_j g_i(p)\big)\; v_1^i(x)\; v_2^j(x) \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{3}\big(\partial_i g_j(p) - \partial_j g_i(p)\big)\; v_1^i(x)\; v_2^j(x) \;=\; \nabla\wedge f(x).
\end{aligned} \tag{II.106}$$

Damit erhalten wir zusammen mit dem Satz II.15 von Stokes in $\mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned}\int_M \big\langle \nabla \wedge g(p) \big| n_p \big\rangle \, d^2\sigma(p) \;&=\; \int_G \big\langle \nabla \wedge g[\psi(x)] \big| b(\psi(x),\phi) \big\rangle \, d^2x \;=\; \int_G \nabla \wedge f(x) \, d^2x \\ &=\; \int_{\partial G} f(x) \cdot d^1\sigma(x) \;=\; \int_0^1 \big\langle f[\gamma(t)] \big| \dot\gamma(t) \big\rangle \, dt, \end{aligned} \tag{II.107}$$

wobei $\gamma \in C^1\big([0,1];\mathbb{R}^2\big)$ mit $\gamma\big([0,1]\big) = \partial G$ eine geeignete Parametrisierung des Randes ∂G von G ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\big\langle f[\gamma(t)] \big| \dot\gamma(t) \big\rangle \;&=\; \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha[\gamma(t)] \, \dot\gamma_\alpha(t) \;=\; \sum_{i=1}^{3} g_i\big(\psi[\gamma(t)]\big) \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \psi_i[\gamma(t)]}{\partial x_\alpha} \, \dot\gamma_\alpha(t) \\ &=\; \left\langle g\big([\psi\circ\gamma](t)\big) \;\middle|\; \frac{d}{dt}\Big([\psi\circ\gamma](t)\Big) \right\rangle, \end{aligned} \tag{II.108}$$

und $\psi \circ \gamma \in C^1\big([0,1];\mathbb{R}^3\big)$ mit $[\psi\circ\gamma]\big([0,1]\big) = \partial M$ ist eine zulässige Parametrisierung des Randes ∂M von M. Daher ist

$$\int_0^1 \big\langle f[\gamma(t)] \big| \dot\gamma(t) \big\rangle \, dt \;=\; \int_0^1 \left\langle g\big([\psi\circ\gamma](t)\big) \;\middle|\; \frac{d}{dt}\Big([\psi\circ\gamma](t)\Big) \right\rangle dt \;=\; \int_{\partial M} g(p) \cdot d^1\sigma(p). \tag{II.109}$$