

I. Mannigfaltigkeiten

I.1. Topologische Räume, Homöomorphismen und Mannigfaltigkeiten

Definition I.1. Sei M eine Menge. Ein Teilsystem $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ihrer Potenzmenge heißt **Topologie** $:\Leftrightarrow$

$$(i) \quad \emptyset, M \in \mathfrak{T}, \quad (I.1)$$

$$(ii) \quad \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \in \mathfrak{T}, \quad (I.2)$$

$$(iii) \quad U_1, U_2, \dots, U_N \in \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^N U_n \in \mathfrak{T}. \quad (I.3)$$

In diesem Fall heißt $(M, \mathfrak{T})$ (oder auch nur M) **topologischer Raum**, und die Elemente von $\mathfrak{T}$ bezeichnet man als **offene Mengen**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Eine weniger abstrakte Form von (ii) in Definition I.1 ist wie folgt: Ist $J \neq \emptyset$ eine nichtleere Indexmenge und $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{T}$ eine Familie offener Mengen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathfrak{T}$ offen.
- Für jede Menge M ist $(M, \mathfrak{P}(M))$ stets ein topologischer Raum.
- Jeder metrische Raum (X, ρ) ist ein topologischer Raum bezüglich der üblichen metrischen Topologie; die offenen Mengen sind die Teilmengen U von X , die nur innere Punkte enthalten, d.h. zu jedem $p \in U$ gibt es ein $r > 0$, sodass auch $B_\rho(p, r) = \{y \in X \mid \rho(y, p) < r\} \subseteq U$.
- Ist $d \in \mathbb{N}$, so ist also insbesondere $\mathbb{R}^d$ ein topologischer Raum bezüglich der euklidischen Topologie, die von der euklidischen Metrik $\rho_{\text{eukl}}(p, y) = \sqrt{(p_1 - y_1)^2 + \dots + (p_d - y_d)^2}$ induziert wird.
- Sind $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$, so bildet das System

$$\mathfrak{T} := \{M \cap U \mid U \subseteq \mathbb{R}^d, U \text{ offen}\} \subseteq \mathfrak{P}(M) \quad (I.4)$$

der **relativ zu M offenen Mengen** eine Topologie, und $(M, \mathfrak{T})$ wird zum topologischen Raum.

Definition I.2. Seien $(M, \mathfrak{T}_M)$ und $(N, \mathfrak{T}_N)$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig** $:\Leftrightarrow$

$$\forall V \in \mathfrak{T}_N : f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_M. \quad (\text{I.5})$$

Ist f außerdem eine Bijektion $M \rightarrow N$ mit stetiger Inversen $f^{-1} : N \rightarrow M$, so heißen f **Homöomorphismus**, und M und N zueinander **homöomorph**.

Definition I.3. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine offene Menge $A \in \mathfrak{T}$ heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$

$$\forall B, C \in \mathfrak{T}, B \cup C = A, B \cap C = \emptyset : (B = A \wedge C = \emptyset) \vee (B = \emptyset \wedge C = A). \quad (\text{I.6})$$

Eine zusammenhängende offene Menge bezeichnen wir als **Gebiet**.

(ii) Eine offene Menge $A \in \mathfrak{T}$ heißt **wegzusammenhängend** $:\Leftrightarrow$

$$\forall p, q \in A \exists \gamma \in C([0, 1]; M) : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \gamma([0, 1]) \subseteq A. \quad (\text{I.7})$$

Definition I.4. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein zusammenhängender topologischer Raum.

(i) Sind $U \in \mathfrak{T}$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $\varphi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus, so bezeichnet man das Paar $\phi := (U, \varphi)$ als **Karte von M** und $m := m(\phi) \in \mathbb{N}$ als **Dimension von U**.

(ii) Zwei Karten $\phi_1 = (U_1, \varphi_1)$, $\phi_2 = (U_2, \varphi_2)$ von M heißen **verträglich**, falls entweder $U_{12} := U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder $U_{12} \neq \emptyset$ und $m(\phi_1) = m(\phi_2)$ und

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in C^\infty(\varphi_1(U_{12}); \varphi_2(U_{12})) \quad \text{und} \quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty(\varphi_2(U_{12}); \varphi_1(U_{12})) \quad (\text{I.8})$$

gelten.

(iii) Eine Familie $\mathcal{A} = \{\phi_i \mid i \in I\}$ von Karten $\phi_i = (U_i, \varphi_i)$ von M heißt **Atlas von M**, falls $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und ϕ und $\tilde{\phi}$ für alle $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{A}$ verträglich sind.

(iv) Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}$ von M heißen **verträglich**, falls ϕ und $\tilde{\phi}$ für alle $\phi \in \mathcal{A}$ und $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathcal{A}}$ verträglich sind.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass in metrischen Räumen offene Mengen genau dann zusammenhängend sind, wenn sie wegzusammenhängend sind. In allen uns in dieser Vorlesung interessierenden Fällen brauchen wir also zwischen diesen Begriffen nicht zu unterscheiden.
- Weiterhin bemerken wir, dass $m := m(\phi) \in \mathbb{N}$ für alle Karten eines Atlas' $\mathcal{A}$ und alle Karten von mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlanten denselben Wert annimmt und somit konstant ist.

Lemma I.5. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $m \in \mathbb{N}$ die Dimension der Bildbereiche der Karten von M . Die Verträglichkeit von Atlanten von M ist eine Äquivalenzrelation (s. Satz I.16).

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind trivial. Nur bei der Transitivität gibt es etwas zu beweisen. Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ drei Atlanten von M , wobei $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einerseits und $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ andererseits verträglich sind. Seien weiterhin $\phi_1 = (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$ und $\phi_3 = (U_3, \varphi_3) \in \mathcal{A}_3$ zwei Karten und $p \in U_1 \cap U_3$. Weil $\mathcal{A}_2$ ein Atlas ist, gibt es eine Karte $\phi_2 = (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2$ mit $p \in U_2$. Somit ist $U_{123} := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ eine offene Menge in M , die p enthält. Für alle $x \in \varphi_1(U_{123})$ gilt dann

$$(\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1})(x) = (\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x). \quad (\text{I.9})$$

Nach Voraussetzung sind aber $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ und deshalb auch $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ glatt. Genauso folgt die Glattheit von $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$. Also sind auch ϕ_1 und ϕ_3 verträglich. $\square$

Definition I.6. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $m \in \mathbb{N}$ die Dimension der Bildbereiche der Karten von M und $\mathcal{A}$ ein Atlas von M . Die Äquivalenzklasse der mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlanten bezeichnen wir als **(differenzierbare) Mannigfaltigkeit der Dimension m** und schreiben dafür $(M, \mathcal{A})$ (oder auch nur kurz M).

I.2. Parametrisierungen und eingebettete Mannigfaltigkeiten

Definition I.7. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Betrachte M als topologischen Raum bzgl. der relativen Topologie (s. Glg. (I.4)).

- (i) Sei $\phi = (U, \varphi)$ eine Karte von M mit $V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Die Umkehrabbildung $\psi := \varphi^{-1} : V \rightarrow U$ heißt **Parametrisierung von U** $\Leftrightarrow$

$$\psi \in C^\infty(V; U) \quad \text{und} \quad \forall x \in V : \dim \text{Ran} J_\psi(x) = m, \quad (\text{I.10})$$

wobei $(J_\psi)_{i,\alpha} := \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha}$ die Jacobimatrix von ψ notiert.

- (ii) Ist $(M, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m , so dass jede Karte in $\mathcal{A}$ die Inverse einer Parametrisierung ist, so heißt $(M, \mathcal{A})$ **eingebettet (in $\mathbb{R}^d$)** oder **parametrisierte Hyperfläche**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Glg. (I.10) impliziert, dass $m \leq d$ gilt.
- Dass eine (a priori abstrakte) Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^d$ eingebettet ist, deuten wir zukünftig durch $M \subseteq \mathbb{R}^d$ an und lassen das Wort „eingebettet“ weg.
- Seien $m \leq d$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\psi \in C^\infty(V; \mathbb{R}^d)$ injektiv und mit $\dim \text{Ran} J_\psi = m$ auf V . Dann ist $U := \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^d$ mit Atlas $\{(U, \psi^{-1})\}$ eine eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m oder auch eine parametrisierte Hyperfläche der Dimension m .
- Seien

$$\mathbb{S}^1 := \{p = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\|_{\text{eukl}}^2 = p_1^2 + p_2^2 = 1\}, \quad (\text{I.11})$$

$U := \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1)^T\}$ und

$$\varphi(p) := \frac{2p_1}{1 - p_2} \quad (\text{I.12})$$

die **stereografische Projektion**. Dann ist $\phi = (U, \varphi)$ eine Karte von $\mathbb{S}^1$ mit $\varphi(U) = \mathbb{R}$.

- Für $|x| \geq 2$ zum Beispiel sind

$$\begin{aligned} \psi(x) := \varphi^{-1}(x) &= \left(\frac{4x}{x^2 + 4}, x^2 - \frac{4}{x^2 + 4} \right), \quad J_\psi(x) = \left(\frac{d\psi_1(x)}{dx}, \frac{d\psi_2(x)}{dx} \right), \\ \frac{d\psi_1(x)}{dx} &= \frac{-4(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2}, \quad \frac{d\psi_2(x)}{dx} = 2x - \frac{8x}{(x^2 + 4)^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Für $x^2 \neq 4$ ist $\frac{d\psi_1(x)}{dx} \neq 0$, und für $x = \pm 2$ ist $\frac{d\psi_2(x)}{dx} = \pm \frac{15}{4} \neq 0$. Also ist $\dim \text{Ran } J_\psi(x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 2$. Analog zeigt man dieselbe Aussage für $|x| < 2$.

- Sind $\tilde{U} := \mathbb{S}^1 \cap (\mathbb{R}^+)^2$ und $\tilde{\varphi}(p) := \arccos\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right)$, so ist $\tilde{\phi} := (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ auch eine Karte von $\mathbb{S}^1$ mit $\tilde{V} := \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = (0, \pi/2)$.
- ϕ und $\tilde{\phi}$ sind verträglich. Es ist nämlich $U \cap \tilde{U} = \tilde{U}$, und z.B. ist $\tilde{\varphi}^{-1} : (0, \pi/2) \rightarrow \tilde{U}$ gegeben durch $\tilde{\varphi}^{-1}(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$, also ist

$$\left(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \right)(\alpha) = \frac{2 \cos(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \Rightarrow \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in C^\infty\left((0, \pi/2); (2, \infty)\right), \quad (\text{I.14})$$

wobei $\varphi(\tilde{U}) = (2, \infty)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Der Graph einer Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, ist in natürlicher Weise eine in $\mathbb{R}^d$ eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension $d - 1$. Seien $G \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ ein Gebiet und $f \in C^\infty(G; \mathbb{R})$. Definieren wir $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$\psi(x_1, \dots, x_{d-1}) := (x_1, \dots, x_{d-1}, f(x_1, \dots, x_{d-1})), \quad (\text{I.15})$$

so sind mit $M := U := \psi(G) \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\varphi := \psi^{-1}$ das Paar $\phi = (U, \varphi)$ eine Karte und $\{\phi\}$ ein Atlas von M . Offensichtlich ist ψ injektiv und

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{d-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_d}{\partial x_{d-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{d-1}} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.16})$$

Aus

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \dots + a_{d-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_{d-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{d-1} \\ \sum_{i=1}^{d-1} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.17})$$

folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_{d-1} = 0$, also ist $\dim \text{Ran } J_\psi = d - 1$.

- Sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d-m})$ mit $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $\dim \text{Ran } J_F(p) = d - m$, für alle $p \in F^{-1}(0)$. Sei weiterhin

$$M := \{p \in \mathbb{R}^d \mid F(p) = 0\} = F^{-1}(0). \quad (\text{I.18})$$

Nach dem Satz über lokale Auflösbarkeit gibt es zu jedem Punkt $p_{(0)} \in M$ eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_d$, so dass $F(p) = 0$ lokal um $p_{(0)}$ nach $(p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(m)})$ auflösbar ist. D.h. also, für $r > 0$ genügend klein und $p \in B(p_{(0)}, r)$ gibt es $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{d-m})$, so dass

$$\begin{aligned} p \in M &\Leftrightarrow F(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_{\pi(m+1)} &= h_1(p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(m)}), \\ \vdots \\ p_{\pi(d)} &= h_{d-m}(p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(m)}). \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Daher ist mit $\varphi(p_1, \dots, p_d) := (p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(m)})$ die Abbildung $\phi_{p_{(0)}} = (M \cap B(p_{(0)}, r), \varphi)$ eine Karte von M . Weiterhin ist $\mathcal{A} := \{\phi_{p_{(0)}} \mid p_{(0)} \in M\}$ ein Atlas von M . In dieser Weise definieren Niveaumengen $F^{-1}(0)$ in natürlicher Weise Mannigfaltigkeiten. Allerdings muss man die Frage, ob $F^{-1}(0)$ zusammenhängend ist, separat untersuchen.

- Definieren wir durch

$$\mathbb{S}^{d-1} := \{p \in \mathbb{R}^d \mid p_1^2 + \dots + p_d^2 = 1\} \quad (\text{I.20})$$

die $d - 1$ -dimensionale Einheitssphäre (Oberfläche der d -dimensionalen Einheitskugel), so können wir mit $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, F(p) := p^2 - 1$ auch

$$\mathbb{S}^{d-1} = F^{-1}(0) \quad (\text{I.21})$$

schreiben. Dann ist

$$J_F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_d} \right) = 2p \neq 0, \quad (\text{I.22})$$

für alle $p \in \mathbb{S}^{d-1}$, für die ja $p^2 = 1$ gilt. Also ist $\mathbb{S}^{d-1}$ eine $(d - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

- Definieren wir die stereografischen Projektionen

$$\varphi_\pm : \mathbb{S}^{d-1} \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} =: U_\pm \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}, \quad (\text{I.23})$$

$$\varphi_\pm(p_1, \dots, p_d) := \frac{2}{1 \mp p_d} \cdot (p_1, \dots, p_{d-1})^T, \quad (\text{I.24})$$

so sind $\phi_\pm = (U_\pm, \varphi_\pm)$ Karten und $\{\phi_+, \phi_-\}$ ein Atlas von $\mathbb{S}^{d-1}$.

- Definieren wir Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$ mit vertauschten Achsen, so ergeben die zugehörigen Karten $\tilde{\phi}_1 = (\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1), \tilde{\phi}_2 = (\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2)$ einen mit $\mathcal{A} = \{\phi_+, \phi_-\}$ verträglichen Atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2\}$.
- Seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$ linear unabhängig, $y \in \mathbb{R}^d$ und $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$\psi(x_1, \dots, x_m) := y + \sum_{i=1}^m x_i v_i. \quad (\text{I.25})$$

Dann sind $J_\psi = (v_1, \dots, v_m) \in \mathfrak{M}_{d \times m}(\mathbb{R})$ und somit $\dim \text{Ran } J_\psi = m$. Also ist $\varphi := \psi^{-1}$ eine Kartenabbildung für die Mannigfaltigkeit

$$M = \left\{ y + \sum_{i=1}^m x_i v_i \mid (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \right\}. \quad (\text{I.26})$$

I.3. Tangentialraum und Gramsche Determinante

Definition I.8. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A} = \{\phi_i \mid i \in I\}$. Seien $p \in M$ und $\phi = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ so, dass $p \in U$.

- (i) Die **Tangentialvektoren** $v_1(p, \phi), \dots, v_m(p, \phi) \in \mathbb{R}^d$ werden durch die partiellen Ableitungen von φ^{-1} definiert; setzen wir $V := \varphi(U)$, $x := \varphi(p)$ und $\psi := \varphi^{-1}$, so sind

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^m : \quad v_\alpha(p, \phi) := \left(\frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial \psi_d(x)}{\partial x_\alpha} \right)^T. \quad (\text{I.27})$$

- (ii) Der **Tangentialraum** an M im Punkt $p \in M$ ist durch

$$T_p := \text{span}\{v_1(p, \phi), \dots, v_m(p, \phi)\} \quad (\text{I.28})$$

gegeben.

- (iii) Die **Gramsche Matrix** $G(p, \phi) := (G_{\alpha, \beta}(p, \phi))_{\alpha, \beta=1}^m \in \mathfrak{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ und die **Gramsche Determinante** $g(p, \phi)$ von ϕ an p sind durch

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_1^m : \quad G_{\alpha, \beta}(p, \phi) := \langle v_\alpha(p, \phi) \mid v_\beta(p, \phi) \rangle \quad \text{und} \quad g(p, \phi) := \det[G(p, \phi)] \quad (\text{I.29})$$

definiert.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Tangentialvektoren $v_1(p, \phi), \dots, v_m(p, \phi) \in \mathbb{R}^d$ sind linear unabhängig, denn wegen $J_\psi = (v_1(p, \phi), \dots, v_m(p, \phi))$ ist

$$\dim T_p = \dim \text{Ran } J_\psi(x) = m. \quad (\text{I.30})$$

- Speziell für $m = 1$ ist $v_1(p, \phi) / \|v_1(p, \phi)\|$ eine von ϕ nur in der Orientierung abhängige ONB von T_p .
- Die Matricelemente von $J_\psi(x)$ sind $(J_\psi(x))_{k,\alpha} = (v_\alpha(p, \phi))_k$, für $k \in \mathbb{Z}_1^d$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_1^m$ und $\psi(x) = p$. Insbesondere ist $(J_\psi^T(x) J_\psi(x))_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^d (v_\alpha(p, \phi))_k (v_\beta(p, \phi))_k = \langle v_\alpha(p, \phi) | v_\beta(p, \phi) \rangle$. Es gilt also

$$G(p, \phi) = J_\psi^T(x) J_\psi(x). \quad (\text{I.31})$$

- Die Gramsche Matrix $G(p, \phi) = G(p, \phi)^* = G(p, \phi)^T$ ist reell, symmetrisch und somit auch selbstadjungiert.
- Außerdem ist $G(p, \phi)$ positiv definit. Ist nämlich $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)^T \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, so gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi | G(p, \phi) \psi \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^m \psi_\alpha \langle v_\alpha(p, \phi) | v_\beta(p, \phi) \rangle_{\mathbb{R}^d} \psi_\beta \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha v_\alpha(p, \phi) \middle| \sum_{\beta=1}^m \psi_\beta v_\beta(p, \phi) \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \left\| \sum_{\alpha=1}^m \psi_\alpha v_\alpha(p, \phi) \right\|_{\mathbb{R}^d}^2 > 0, \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

da die Tangentialvektoren linear unabhängig sind.

- Da $G(p, \phi)$ positiv definit ist, sind alle Eigenwerte von $G(p, \phi)$ strikt positiv und insbesondere ist stets $g(p, \phi) > 0$.

Lemma I.9. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\phi = (U, \varphi)$ und $\tilde{\phi} = (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ zwei miteinander verträgliche Karten von M und $p \in \tilde{U} := U \cap \tilde{U}$. Dann gilt

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^m : \quad v_\alpha(p, \phi) = \sum_{\beta=1}^m \left[J_\theta^T(x) \right]_{\alpha,\beta} v_\beta(p, \tilde{\phi}), \quad (\text{I.33})$$

wobei $x := \varphi(p)$ und J_θ die Jacobimatrix der Bijektion $\theta := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(\hat{U}); \tilde{\varphi}(\hat{U}))$ sind.

Beweis. Seien $V := \varphi(\hat{U})$, $\tilde{V} := \tilde{\varphi}(\hat{U})$, $x := \varphi(p)$, $\tilde{x} := \tilde{\varphi}(p)$, $\psi := \varphi^{-1}$ und $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1}$. Es ist $\psi = \tilde{\psi} \circ \theta$, und aus der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_\beta} \bigg|_{\tilde{x}=\theta(x)} \cdot \frac{\partial \theta_\beta(x)}{\partial x_\alpha}, \quad (\text{I.34})$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_1^m$ und alle $j \in \mathbb{Z}_1^d$. □

Korollar I.10. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist der Tangentialraum T_p wohldefiniert, d.h. unabhängig von der zu Grunde gelegten Karte.

Beweis. Aus Lemma I.9 folgt sofort, dass

$$\text{span}\{v_1(p, \phi), \dots, v_m(p, \phi)\} \subseteq \text{span}\{v_1(p, \tilde{\phi}), \dots, v_m(p, \tilde{\phi})\}. \quad (\text{I.35})$$

Genauso zeigt man die umgekehrte Inklusion. $\square$

Korollar I.11. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\phi = (U, \varphi)$ und $\tilde{\phi} = (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ zwei miteinander verträgliche Karten von M und $p \in \hat{U} := U \cap \tilde{U}$. Dann gilt

$$G(p, \phi) = J_\theta^T(x) G(p, \tilde{\phi}) J_\theta(x), \quad (\text{I.36})$$

wobei $x := \varphi(p)$ und J_θ die Jacobimatrix der Bijektion $\theta := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(\hat{U}); \tilde{\varphi}(\hat{U}))$ sind.

Beweis. Sind $J_{\alpha, \beta} := \partial(\theta)_\alpha(x)/\partial x_\beta$ die Matrixelemente von $J_\theta(x)$, so lautet (I.33)

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^m : \quad v_\alpha(p, \phi) = \sum_{\tilde{\alpha}=1}^m J_{\alpha, \tilde{\alpha}} v_{\tilde{\alpha}}(p, \tilde{\phi}). \quad (\text{I.37})$$

Also ist

$$\begin{aligned} G_{\alpha, \beta}(p, \phi) &= \langle v_\alpha(p, \phi) | v_\beta(p, \phi) \rangle = \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}=1}^m J_{\alpha, \tilde{\alpha}} \langle v_{\tilde{\alpha}}(p, \tilde{\phi}) | v_{\tilde{\beta}}(p, \tilde{\phi}) \rangle J_{\tilde{\beta}, \beta} \\ &= \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}=1}^m J_{\alpha, \tilde{\alpha}}^T G_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(p, \tilde{\phi}) J_{\tilde{\beta}, \beta}, \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

woraus sich sofort (I.36) ergibt. $\square$

I.4. Integrale über parametrisierte Hyperflächen

Definition I.12. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarem Atlas $\mathcal{A} = \{\phi_k\}_{k=1}^K$, wobei $K \in \mathbb{N}$ oder $K = \infty$. Seien $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $V := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, und $\psi := \varphi^{-1}$. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, für die $(f \circ \psi) : V \rightarrow \mathbb{C}$ messbar ist und $(f \circ \psi)\sqrt{g(\psi(\cdot), \phi)} \in L^1(V, d^m x)$ gilt, definieren wir das **Integral von f über U** durch

$$\int_U f(y) d\sigma(y) := \int_V f[\psi(x)] \sqrt{g(\psi(x), \phi)} d^m x. \quad (\text{I.39})$$

Seien $\psi_k := \varphi_k^{-1} : V_k \rightarrow U_k$ und $\tilde{U}_k \subseteq U_k$ so, dass $\tilde{V}_k := \varphi(\tilde{U}_k) \subseteq \varphi(U_k) =: V_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}_1^K$ messbar ist und dass $M = \bigcup_{k=1}^K \tilde{U}_k$ sowie $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset$, für $i \neq j$ gilt. Für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}_1^K$ setzen wir $\hat{f}_k(y) := f(y) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{U}_k}(y)$. Sind $(\hat{f}_k \circ \psi_k) : \tilde{V}_k \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und $(\hat{f}_k \circ \psi_k)\sqrt{g(\psi_k, \phi_k)} \in L^1(\tilde{V}_k, d^m x)$, für alle $k \in \mathbb{Z}_1^K$, so definieren wir das **Integral von f über M** durch

$$\int_M f(y) d\sigma(y) := \sum_{k=1}^K \int_{U_k} \hat{f}_k(y) d\sigma(y). \quad (\text{I.40})$$

Nun gilt es, diesen Integralbegriff zu rechtfertigen, d.h. dessen Wohldefiniertheit nachzuweisen.

Satz I.13. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\phi = (U, \varphi)$, $\tilde{\phi} = (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ zwei miteinander verträgliche Karten von M und $\hat{U} := U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Seien $V := \varphi(\hat{U})$, $\tilde{V} := \tilde{\varphi}(\hat{U})$, $\psi := \varphi^{-1}$ und $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1}$. Für jede Funktion $f : \hat{U} \rightarrow \mathbb{C}$, für die $f \circ \psi$ (und somit auch $f \circ \tilde{\psi}$) messbar ist, gilt

$$(f \circ \psi) \sqrt{g(\psi(\cdot), \phi)} \in L^1(V, d^m x) \Leftrightarrow (f \circ \tilde{\psi}) \sqrt{g(\tilde{\psi}(\cdot), \tilde{\phi})} \in L^1(\tilde{V}, d^m \tilde{x}). \quad (\text{I.41})$$

Ist f integrierbar im Sinne von Glg. (I.41), so gilt darüber hinaus auch

$$\int_V f[\psi(x)] \sqrt{g(\psi(x), \phi)} d^m x = \int_{\tilde{V}} f[\tilde{\psi}(\tilde{x})] \sqrt{g(\tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{\phi})} d^m \tilde{x}. \quad (\text{I.42})$$

Beweis. Seien $p = \psi(x) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) \in \hat{U}$ und $\theta := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \tilde{\varphi} \circ \psi$. Nach Korollar I.11 ist $G(p, \phi) = J_\theta^T(x) G(p, \tilde{\phi}) J_\theta(x)$ und deshalb auch

$$g(p, \phi) = \det [G(p, \phi)] = \det [J_\theta(x)]^2 \det [G(p, \tilde{\phi})] = \det [J_\theta(x)]^2 g(p, \tilde{\phi}). \quad (\text{I.43})$$

Wegen $g(p, \phi), g(p, \tilde{\phi}) \neq 0$ ist auch $\det [J_\theta(x)] \neq 0$, und die Bijektion $\theta := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ definiert eine Koordinatentransformation von V nach $\tilde{V}$. Damit ist Satz I.13 eine direkte Konsequenz aus der Transformationsformel für Integrale,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} f[\tilde{\psi}(\tilde{x})] \sqrt{g(\tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{\phi})} d^m \tilde{x} &= \int_V f[\tilde{\psi}(\theta(x))] \cdot |\det (J_\theta(x))| \cdot \sqrt{g(\tilde{\psi}(\theta(x)), \tilde{\phi})} d^m x \\ &= \int_V f[\psi(x)] \sqrt{g(\psi(x), \phi)} d^m x. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

□

Der vorige Satz I.13 sichert, dass das Integral (I.40) einer Funktion auf einer zusammenhängenden, m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^d$ unabhängig ist von dem zu Grunde liegenden Atlas $\mathcal{A} = \{\phi_k\}_{k=1}^K$ von M . Der folgende Satz, den wir ohne Beweis formulieren, sichert andererseits, dass das Integral (I.40) auch unseren anschaulich-geometrischen Vorstellungen entspricht.

Satz I.14. Seien $m, d \in \mathbb{N}$, $m \leq d$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarem Atlas $\mathcal{A} = \{\phi_k\}_{k=1}^K$. Seien weiterhin

$$M(\varepsilon) := M + B_\varepsilon(0) = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(p, M) < \varepsilon\} \quad (\text{I.45})$$

die offene ε -Umgebung von M , wobei $\varepsilon > 0$. Ist $f \in C(M(1); \mathbb{C})$ eine stetige Funktion auf $M(1)$, so gilt

$$\int_M f(y) d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V_{d-m}(\varepsilon)} \int_{M(\varepsilon)} f(p) d^d p \right\}, \quad (\text{I.46})$$

wobei $V_{d-m}(\varepsilon) := \int_{|z| < \varepsilon} d^{d-m} z$ das Volumen der $(d-m)$ -dimensionalen (euklidischen) Kugel vom Radius ε bezeichnet.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist in Satz I.14 speziell $m = d - 1$, so ist

$$\int_M f(y) d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{M(\varepsilon)} f(p) d^d p \right\}. \quad (\text{I.47})$$

- Mit $f \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^d$ ist

$$\int_M d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V_{d-m}(\varepsilon)} \int_{M(\varepsilon)} d^d p \right\} =: \text{Vol}_m(M) \quad (\text{I.48})$$

das m -dimensionale Volumen von M .

- Sei für $a \in (0, 1)$ ein Kegelstumpf $K_a \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$K_a = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} z \cos(\alpha) \\ \frac{1}{2} z \sin(\alpha) \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi, a < z < 1 \right\}. \quad (\text{I.49})$$

Dann ist K_a bis auf eine Nullmenge (in $\mathbb{R}^3$) parametrisiert durch $\psi : G \rightarrow U \subseteq K_a$, mit $G := (a, 1) \times (0, 2\pi)$ und

$$\psi(z, \alpha) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} z \cos(\alpha) \\ \frac{1}{2} z \sin(\alpha) \\ z \end{pmatrix} \in U. \quad (\text{I.50})$$

Die Karte für U ist dann $\phi = (U, \psi^{-1})$. Die beiden Tangentialvektoren sind (mit $x_1 =: z$ und $x_2 =: \alpha$)

$$v_1 = \frac{\partial \psi(z, \alpha)}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(\alpha) \\ \frac{1}{2} \sin(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi(z, \alpha)}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \sin(\alpha) \\ \frac{z}{2} \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.51})$$

daher $\|v_1\|^2 = \frac{5}{4}$, $\|v_2\|^2 = \frac{z^2}{4}$, $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$ und somit

$$G(\psi(z, \alpha), \phi) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{4} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.52})$$

d.h.

$$\sqrt{g(\psi(z, \alpha), \phi)} = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{z^2}{4} - 0} = \frac{\sqrt{5} z}{4}. \quad (\text{I.53})$$

Also ist

$$\begin{aligned} \text{Vol}_2(K_a) &= \text{Vol}_2(U) \\ &= \int_a^1 \left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{\sqrt{5} z}{4} d\alpha \right) dz = \frac{2\pi \sqrt{5}}{4} \left[\frac{z^2}{2} \right]_a^1 \\ &= \frac{\sqrt{5} \pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{\sqrt{5} \pi (1 - a^2)}{4}. \end{aligned} \quad (\text{I.54})$$

Im Limes $a \rightarrow 0$ erhalten wir die Mantelfläche eines Kegels der Höhe $h = 1$ und Radius $R = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{Vol}_2(K_a) = \frac{\sqrt{5} \pi (1 - a^2)}{4} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}. \quad (\text{I.55})$$

- Sei $\gamma \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ ein glatter Weg von $a = \gamma(0)$ nach $b = \gamma(1)$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, für alle $t \in (0, 1)$. Betrachten wir $\Gamma := \gamma((0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^d$ als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\phi = (\Gamma, \gamma^{-1})\}$, so ist $g(\gamma(t), \phi) = \|\gamma(t)\|^2$ und deshalb nach (I.39)

$$\int_{\Gamma} f(y) d\sigma(y) = \int_0^1 f[\gamma(t)] \sqrt{g(\gamma(t), \phi)} dt = \int_0^1 f[\gamma(t)] \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad (\text{I.56})$$

das **Integral von f längs des Wegs $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$** .

- Sei $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Setzen wir speziell

$$f[y] := \left\langle F[y] \left| \frac{\dot{\gamma}[\gamma^{-1}(y)]}{\|\dot{\gamma}[\gamma^{-1}(y)]\|} \right. \right\rangle, \quad (\text{I.57})$$

so ist f bis auf sein Vorzeichen von der Parametrisierung γ unabhängig, und in (I.56) ergibt sich

$$\int_{\Gamma} F(y) \cdot d\sigma(y) := \int_{\Gamma} f(y) d\sigma(y) = \int_0^1 \left\langle F[\gamma(t)] \left| \dot{\gamma}(t) \right. \right\rangle dt, \quad (\text{I.58})$$

das **Wegintegral von F längs $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$** .

I.5. Ergänzungen

I.5.1. Äquivalenzrelationen

Häufig lässt sich eine Menge in eine Familie disjunkter Teilmengen zerlegen, deren Elemente jeweils ähnliche Eigenschaften haben.

Definition I.15. Eine Relation $R : A \times A \rightarrow \{w, f\}$ auf einer Menge A , mit $R(a, b) = w \Leftrightarrow a \sim b$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

$$\text{Reflexivität} \quad \forall a \in A : \quad a \sim a, \quad (\text{I.59})$$

$$\text{Symmetrie} \quad \forall a, b \in A : \quad a \sim b \Leftrightarrow b \sim a, \quad (\text{I.60})$$

$$\text{Transitivität} \quad \forall a, b, c \in A : \quad (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow (a \sim c). \quad (\text{I.61})$$

Satz I.16. Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A bewirkt eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen. Dabei sind zwei Elemente aus A genau dann äquivalent, wenn sie derselben Teilmenge angehören.

Beweis. Zu $a \in A$ definieren wir

$$[a]_{\sim} := \{x \in A \mid a \sim x\}. \quad (\text{I.62})$$

Wegen $a \in [a]_{\sim}$ ist $[a]_{\sim}$ nicht leer. Wir zeigen nun für $a, b \in A$, dass

$$\text{entweder} \quad [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset \quad (\text{I.63})$$

$$\text{oder} \quad [a]_{\sim} = [b]_{\sim} \quad (\text{I.64})$$

gilt. (Wegen $[a]_{\sim} \neq \emptyset$ können (I.63) und (I.64) nicht gleichzeitig gelten.)

Sei $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset$. Dann gibt es also ein gemeinsames Element $c \in [a]_{\sim}, c \in [b]_{\sim}$. Damit gelten $a \sim c$ und $c \sim b$, also auch $a \sim b$. Ist nun $x \in [a]_{\sim}$, dann gilt $x \sim a$ und mit $a \sim b$ auch $x \sim b$, also $x \in [b]_{\sim}$. Es folgt, dass $[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$. Genauso erhält man $[b]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim}$, also $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$. Damit ist (I.59)–(I.61) gezeigt.

Schreiben wir jetzt

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\sim}, \quad (\text{I.65})$$

folgt die Aussage unmittelbar durch Zusammenfassen gleicher $[a]_{\sim}$. □

Definition I.17. Die Teilmengen $[a]_{\sim}$ heißen **Äquivalenzklassen**. Die Familie der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit

$$A / \sim \quad (\text{sprich: " } A \text{ modulo } \sim \text{ ").} \quad (\text{I.66})$$

Liegt a in einer Äquivalenzklasse, so heißt a **Repräsentant der Klasse**.

Bemerkungen und Beispiele.

$$A := \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (\text{I.67})$$

$$m \sim n :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad m - n = kp. \quad (\text{I.68})$$

$$\implies \mathbb{Z} = [0]_{\sim} \cup [1]_{\sim} \cup \dots \cup [p-1]_{\sim}, \quad (\text{I.69})$$

$$[j]_{\sim} = \{kp + j \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{I.70})$$

$\mathbb{Z}/\sim$ bezeichnet man auch mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_p$ und $[j]_{\sim} =: [j] \bmod p$.

Definition I.18. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A . Eine Teilmenge $S \subseteq A$ heißt ein **vollständiges Repräsentantensystem zu $\sim$** , falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

- (i) Jedes Element aus A ist zu einem Element aus S äquivalent.
- (ii) Die Elemente aus S sind paarweise nicht äquivalent.

Bemerkungen und Beispiele.

Ist

$$A := \{g \subseteq \mathbb{R}^2 \mid g \text{ ist eine Gerade}\}, \quad (\text{I.71})$$

$$g_1 \sim g_2 :\Leftrightarrow g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind parallel}, \quad (\text{I.72})$$

so ist

$$S = \{g \in A \mid g \cap \{0\} = \{0\}\} \quad (\text{I.73})$$

ein vollständiges Repräsentantensystem.