

# VI. Die Zweite Quantisierung

Der Übergang von der Schrödingerschen Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie geschieht durch Einführung der *Zweiten Quantisierung*. Zunächst bedeutet dies, den Fockraum sowie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einzuführen.

## VI.1. Fock-Räume: allgemein, bosonisch und fermionisch

**Definition VI.1.** Sei  $\mathfrak{h}$  ein (separabler komplexer) Hilbert-Raum.

(i) Der **Vakuumssektor** ist der eindimensionale Hilbert-Raum

$$\mathfrak{F}^{(0)}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{F}_b^{(0)}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{F}_f^{(0)}(\mathfrak{h}) := \mathbb{C} \cdot \Omega, \quad (\text{VI.1})$$

wobei  $\Omega$  ein Einheitsvektor ist,  $\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathfrak{F}^{(0)}(\mathfrak{h})} = 1$ , und als **Vakuumsvektor** bezeichnet wird.

(ii) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der  **$n$ -Teilchen-Hilbert-Raum**  $(\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}), \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})})$  durch

$$\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}) := \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{h} \quad (\text{VI.2})$$

und stetige und sesquilineare Fortsetzung von

$$\langle \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n | \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \rangle_{\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})} := \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathfrak{h}} \cdots \langle \varphi_n | \psi_n \rangle_{\mathfrak{h}} \quad (\text{VI.3})$$

definiert.

(iii) Der **Fock-Raum über  $\mathfrak{h}$**  ist der Hilbert-Raum  $(\mathfrak{F}(\mathfrak{h}), \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h})})$  mit

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}), \quad \left\langle (\Phi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \middle| (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \right\rangle_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h})} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi^{(n)} | \Psi^{(n)} \rangle_{\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})}. \quad (\text{VI.4})$$

(iv) Der **bosonische Fock-Raum über  $\mathfrak{h}$**  ist der durch

$$\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h}) := \mathcal{S}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h}) := \mathcal{S}^{(n)}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})] =: \bigvee_{k=1}^n \mathfrak{h}, \quad (\text{VI.5})$$

definierte Unterraum  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  des Fock-Raums über  $\mathfrak{h}$ . Dabei ist  $\mathcal{S} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^{(n)} = \mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^* \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  die orthogonale Projektion auf die total symmetrischen Vektoren in  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$ , und  $\mathcal{S}^{(n)} = [\mathcal{S}^{(n)}]^2 = [\mathcal{S}^{(n)}]^* \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})]$  sind für  $n \in \mathbb{N}_0$  die orthogonalen

## VI. Die Zweite Quantisierung

Projektionen auf die symmetrischen Vektoren, die durch lineare und stetige Fortsetzung von

$$\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{h} : \quad \mathcal{S}^{(n)}[\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n] := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \varphi_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\pi(n)} \quad (\text{VI.6})$$

auf  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$  definiert sind.

(v) Der **fermionische Fock-Raum über  $\mathfrak{h}$**  ist der durch

$$\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h}) := \mathcal{A}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h}) := \mathcal{A}^{(n)}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})] =: \bigwedge_{k=1}^n \mathfrak{h}, \quad (\text{VI.7})$$

definierte Unterraum  $\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  des Fock-Raums über  $\mathfrak{h}$ . Dabei ist  $\mathcal{A} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^* \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  die orthogonale Projektion auf die total antisymmetrischen Vektoren in  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$ , und  $\mathcal{A}^{(n)} = [\mathcal{A}^{(n)}]^2 = [\mathcal{A}^{(n)}]^* \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})]$  sind für  $n \in \mathbb{N}_0$  die orthogonalen Projektionen auf die antisymmetrischen Vektoren, die durch lineare und stetige Fortsetzung von

$$\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{h} : \quad \mathcal{A}^{(n)}[\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n] := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} (-1)^\pi \varphi_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\pi(n)} \quad (\text{VI.8})$$

auf  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$  definiert sind.

### Bemerkungen und Beispiele.

- Es sind

$$\mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_f^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{F}_b^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \quad (\text{VI.9})$$

und deshalb bezeichnet man  $\mathfrak{h}$  als **1-Teilchen-Hilbert-Raum**.

- Ist  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{h}$  eine ONB in  $\mathfrak{h}$ , so ist

$$\{\varphi_{k(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{k(n)} \mid k(1), \dots, k(n) \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.10})$$

eine ONB in  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$ .

- Mit

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := \sqrt{n!} \mathcal{A}_n(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \frac{(-1)^\pi}{\sqrt{n!}} \varphi_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\pi(n)} \quad (\text{VI.11})$$

ist

$$\{\varphi_{k(1)} \wedge \varphi_{k(2)} \wedge \dots \wedge \varphi_{k(n)} \mid 1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(n)\} \subseteq \mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.12})$$

eine ONB in  $\mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h})$ .

## VI. Die Zweite Quantisierung

- Ist  $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots) \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen mit  $\sum_{k=1}^{\infty} n_k = n$ , so sind nur höchstens  $m \leq n$  dieser Zahlen  $n_{k(1)}, n_{k(2)}, \dots, n_{k(m)} \in \mathbb{N}$  ungleich null, wobei o.B.d.A.  $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(m)$  gilt. Dann ist

$$\left\{ \mathcal{S} \left( \frac{\varphi_{k(1)}^{\otimes n_{k(1)}}}{\sqrt{n_{k(1)}!}} \otimes \dots \otimes \frac{\varphi_{k(m)}^{\otimes n_{k(m)}}}{\sqrt{n_{k(m)}!}} \right) \mid \underline{n} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}, n_{k(1)} + \dots + n_{k(m)} = n \right\} \subseteq \mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.13})$$

eine ONB in  $\mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h})$ .

**Definition VI.2.** Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum und

$$\mathcal{D}_{\mathcal{N}} := \left\{ \Phi = (\phi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|\phi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}. \quad (\text{VI.14})$$

Dann ist der **Teilchenzahloperator**  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}_{\mathcal{N}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  definiert durch

$$\forall \Phi = (\phi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}} : \quad \mathcal{N}\Phi := (n \phi^{(n)})_{n=0}^{\infty}. \quad (\text{VI.15})$$

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Der Teilchenzahloperator  $\mathcal{N}$  agiert also auf dem dichten Definitionsbereich  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  als reeller Multiplikationsoperator. Da  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$  der natürliche Definitionsbereich für  $\mathcal{N}$  ist, folgt daraus die Selbstadjungiertheit von  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}_{\mathcal{N}})$ .
- Es sind  $\sigma(\mathcal{N}) = \mathbb{N}_0$ ,  $\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{N}) = \{0\}$  und  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{N}) = \mathbb{N}$ .
- Bezeichnen wir mit  $P^{(n)} := \mathbb{1}_{\{n\}}(\mathcal{N})$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  die Projektionen auf die invarianten Unterräume zu den Eigenwerten des Teilchenzahloperators, so sind  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}) = P^{(n)}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$ ,  $\mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h}) = P^{(n)}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  und  $\mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h}) = P^{(n)}[\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})]$ .

## VI.2. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

**Definition VI.3.** Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum und  $\varphi \in \mathfrak{h}$ .

(i) Wir definieren  $A_0^\dagger(\varphi) \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(0)}(\mathfrak{h}); \mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{h})]$  durch

$$A_0^\dagger(\varphi)[\Omega] := \phi. \quad (\text{VI.16})$$

(ii) Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $A_n^\dagger(\varphi) \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}); \mathfrak{F}^{(n+1)}(\mathfrak{h})]$  durch

$$\forall \phi^{(n)} \in \mathfrak{F}^{(n)} : \quad A_n^\dagger(\varphi)[\phi^{(n)}] := \sqrt{n+1} \varphi \otimes \phi^{(n)}. \quad (\text{VI.17})$$

(iii) Wir definieren den **Erzeugungsoperator (zu  $\varphi$ )**  $(A^\dagger(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  durch

$$A^\dagger(\varphi)[(\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots)] := (0, A_0^\dagger(\varphi)[\phi^{(0)}], A_1^\dagger(\varphi)[\phi^{(1)}], A_2^\dagger(\varphi)[\phi^{(2)}], \dots), \quad (\text{VI.18})$$

wobei  $\mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}} := \{ \Phi = (\phi^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} n \|\phi^{(n)}\|^2 < \infty \}$ . In diesem Zusammenhang bezeichnet man  $\varphi \in \mathfrak{h}$  auch als **Orbital**.

## VI. Die Zweite Quantisierung

(iv) Wir definieren  $A_0(\varphi) \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{h}); \mathfrak{F}^{(0)}(\mathfrak{h})]$  durch

$$\forall \psi \in \mathfrak{h} : \quad A_0(\varphi)[\psi] := \langle \varphi | \psi \rangle \cdot \Omega. \quad (\text{VI.19})$$

(v) Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $A_n(\varphi) \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}^{(n+1)}(\mathfrak{h}); \mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})]$  durch

$$A_n(\varphi)[\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1}] := \sqrt{n+1} \langle \varphi | \psi_1 \rangle \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1} \quad (\text{VI.20})$$

und stetige und lineare Fortsetzung.

(vi) Wir definieren den **Vernichtungsoperator (zu  $\varphi$ )**  $(A(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  durch

$$A(\varphi)[(\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots)] := (A_0(\varphi)[\phi^{(1)}], A_1(\varphi)[\phi^{(2)}], A_2(\varphi)[\phi^{(3)}], \dots). \quad (\text{VI.21})$$

### Bemerkungen und Beispiele.

- Für  $\varphi \in \mathfrak{H}$  sind  $A^\dagger(\varphi)$  und  $A(\varphi)$  dicht definiert, abgeschlossen und relativ beschränkt zu  $\sqrt{\mathcal{N}}$ .
- Für  $\varphi \in \mathfrak{H}$  sind  $A^\dagger(\varphi)$  und  $A(\varphi)$  zueinander adjungiert:

$$(A(\varphi))^* = A^\dagger(\varphi), \quad (A^\dagger(\varphi))^* = A(\varphi). \quad (\text{VI.22})$$

- Die Abbildung  $\mathfrak{h} \ni \varphi \mapsto A^\dagger(\varphi) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  ist linear, die Abbildung  $\mathfrak{h} \ni \varphi \mapsto A(\varphi) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  hingegen antilinear (nicht zu verwechseln mit der Linearität von  $A(\varphi)$  als Operator).
- Es ist bequem, zum Fock-Raum  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  Unterräume endlicher Vektoren einzuführen. Ist  $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{h}$  ein dichter Teilraum, so definieren wir durch

$$\mathfrak{F}_{\text{fin}}^{(n)}(\mathfrak{d}) := \text{span}\left\{ \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{d} \right\}, \quad (\text{VI.23})$$

$$\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d}) := \bigcup_{N=1}^{\infty} \text{span}\left\{ (\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N)}, 0, 0 \dots) \mid \right. \\ \left. \phi^{(0)} \in \mathfrak{F}^{(0)}(\mathfrak{h}), \phi^{(1)} \in \mathfrak{F}^{(1)}(\mathfrak{h}), \dots, \phi^{(N)} \in \mathfrak{F}^{(N)}(\mathfrak{h}) \right\}, \quad (\text{VI.24})$$

den *Unterraum  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d})$  endlicher Vektoren über  $\mathfrak{d}$* .

- Offensichtlich ist  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  ein dichter Teilraum, der nicht abgeschlossen ist und für den  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}$  gilt.

**Definition VI.4.** Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum und  $\varphi \in \mathfrak{h}$ .

(i) Wir definieren den **bosonischen Erzeugungsoperator**  $(a^*(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  und den **bosonischen Vernichtungsoperator**  $(a(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  durch

$$a^\dagger(\varphi) := \mathcal{S} \circ A^\dagger(\varphi) \circ \mathcal{S}, \quad a(\varphi) := \mathcal{S} \circ A(\varphi) \circ \mathcal{S}. \quad (\text{VI.25})$$

(ii) Wir definieren den **fermionischen Erzeugungsoperator**  $(c^*(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  und den **fermionischen Vernichtungsoperator**  $(c(\varphi), \mathcal{D}_{\sqrt{\mathcal{N}}}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  durch

$$c^\dagger(\varphi) := \mathcal{A} \circ A^\dagger(\varphi) \circ \mathcal{A}, \quad c(\varphi) := \mathcal{A} \circ A(\varphi) \circ \mathcal{A}. \quad (\text{VI.26})$$

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Für  $\varphi \in \mathfrak{H}$  sind  $a^\dagger(\varphi)$ ,  $a(\varphi)$ ,  $c^\dagger(\varphi)$  und  $c(\varphi)$  dicht definiert, abgeschlossen, relativ beschränkt zu  $\sqrt{\mathcal{N}}$  und zueinander adjungiert,

$$(a(\varphi))^* = a^\dagger(\varphi), \quad (c(\varphi))^* = c^\dagger(\varphi). \quad (\text{VI.27})$$

wir benutzen deshalb von nun an nur noch  $a^*$  und  $c^*$  statt  $a^\dagger$  und  $c^\dagger$ .

- Sind  $d := \dim[\mathfrak{h}] \in \mathbb{N}$  oder  $d = \infty$  und  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\} \subseteq \mathfrak{h}$  eine ONB, so ist

$$\varphi_{k(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{k(n)} = c^*(\varphi_{k(1)}) \cdots c^*(\varphi_{k(n)})\Omega, \quad (\text{VI.28})$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(n) \leq d$ , d.h.

$$\{c^*(\varphi_{k(1)}) \cdots c^*(\varphi_{k(n)})\Omega \mid n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k(1) < \dots < k(n) \leq d\} \subseteq \mathfrak{F}_f(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.29})$$

ist eine ONB in  $\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})$ .

- Ist der 1-Teilchen-Hilbert-Raum  $\mathfrak{h}$  endlich-dimensional,  $\dim[\mathfrak{h}] = d < \infty$ , so ist auch der fermionische Fock-Raum über  $\mathfrak{h}$  endlich-dimensional, nämlich  $\dim[\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})] = 2^d$ .
- Seien  $d := \dim[\mathfrak{h}] \in \mathbb{N}$  oder  $d = \infty$  und  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\} \subseteq \mathfrak{h}$  eine ONB. Seien weiterhin  $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $\sum_{k=1}^d n_k < \infty$ . Dann sind

$$\mathcal{S}(\varphi_1^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes \varphi_d^{\otimes n_d}) = a^*(\varphi_1)^{n_1} \cdots a^*(\varphi_d)^{n_d}\Omega \quad (\text{VI.30})$$

und

$$\left\{ \frac{a^*(\varphi_1)^{n_1} \cdots a^*(\varphi_d)^{n_d}\Omega}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots n_d!}} \mid (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d, n_1 + \dots + n_d < \infty \right\} \subseteq \mathfrak{F}_b(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.31})$$

eine ONB in  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$ .

- Der bosonische Fock-Raum über  $\mathfrak{h}$  ist stets unendlich-dimensional. Sind beispielsweise  $d = 1$  und  $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \cdot \varphi$  mit  $\|\varphi\| = 1$ , so ist  $\{(n!)^{-1/2} a^*(\varphi)^n \Omega\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$  eine ONB in  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$ .

### VI.3. Kanonische Vertauschungsrelationen: CCR und CAR

Wir kommen nun zu den wichtigen kanonischen Vertauschungsrelationen (CCR) und den kanonischen Anti-Vertauschungsrelationen (CAR), mit deren Hilfe sich viele Rechnungen und Abschätzungen auf dem bosonischen Fockraum  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$  bzw. dem fermionischen Fockraum  $\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})$  substanziell vereinfachen lassen.

**Satz VI.5 (CCR).** *Die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen (CCR), d.h. für alle  $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$  gelten*

$$[a^*(\varphi), a^*(\psi)] = [a(\varphi), a(\psi)] = 0, \quad [a(\varphi), a^*(\psi)] = \langle \varphi | \psi \rangle \cdot \mathbb{1}, \quad (\text{VI.32})$$

auf  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} \cap \mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$ , wobei  $[a, b] := ab - ba$ . Außerdem sind die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eine **Fock-Darstellung** der CCR, da sie

$$a(\varphi)\Omega = 0, \quad (\text{VI.33})$$

für alle  $\varphi \in \mathfrak{h}$  erfüllen.

## VI. Die Zweite Quantisierung

**Satz VI.6 (CAR).** *Die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die kanonischen Anti-Vertauschungsrelationen (CAR), d.h. für alle  $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$  gelten*

$$\{c^*(\varphi), c^*(\psi)\} = \{c(\varphi), c(\psi)\} = 0, \quad \{c(\varphi), c^*(\psi)\} = \langle \varphi | \psi \rangle \cdot \mathbb{1}, \quad (\text{VI.34})$$

auf  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} \cap \mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})$ , wobei  $\{a, b\} := ab + ba$ . Außerdem sind die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eine **Fock-Darstellung** der CAR, da sie

$$c(\varphi)\Omega = 0, \quad (\text{VI.35})$$

für alle  $\varphi \in \mathfrak{h}$  erfüllen.

### Bemerkungen und Beispiele.

- Ist  $U \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  ein unitärer Operator,  $U^{-1} = U^*$ , so erfüllen mit  $b^*(\varphi) := Ua^*(\varphi)U^*$  auch  $\mathfrak{h} \ni \varphi \mapsto b^*(\varphi), b(\varphi)$  die kanonischen Vertauschungsrelationen. Allerdings ist dies im Allgemeinen keine Fock-Darstellung, da  $b(\varphi)[U\Omega] = 0$  für alle  $\varphi \in \mathfrak{h}$  und nicht  $b(\varphi)\Omega = 0$  gilt.
- Ist  $f \in \mathfrak{h}$ , so erfüllen mit  $d^*(\varphi) := a^*(\varphi) + \langle f | \varphi \rangle$  auch  $\mathfrak{h} \ni \varphi \mapsto d^*(\varphi), d(\varphi)$  die kanonischen Vertauschungsrelationen. Auch dies ist für  $f \neq 0$  keine Fock-Darstellung, da  $d(\varphi)\Omega = \langle \varphi | f \rangle \Omega \neq 0$  für alle  $\varphi \in \mathfrak{h} \setminus (\mathbb{C} \cdot f)^\perp$ .
- Die bosonischen Erzeugungsoperatoren  $a^*(\varphi)$  und Vernichtungsoperatoren  $a(\varphi)$  sind auf  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$  unbeschränkt, aber die fermionischen Erzeugungsoperatoren  $c^*(\varphi)$  und Vernichtungsoperatoren  $c(\varphi)$  sind auf  $\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})$  beschränkt, und zwar ist

$$\|c^*(\varphi)\|_{\text{op}} = \|c(\varphi)\|_{\text{op}} = \|\varphi\|_{\mathfrak{h}}, \quad (\text{VI.36})$$

wie man leicht aus den CAR gewinnt.

- Eine besondere Rolle in der Quantenfeldtheorie spielen die *Bogolubov-Transformationen*. *Bosonische Bogolubov-Transformationen* sind unitäre Transformationen  $U \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$ , die affin linear in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind, d.h. für die es beschränkte Operatoren  $u \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  und  $v \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{h})$  und ein  $f \in \mathfrak{h}$  so gibt, dass

$$Ua^*(\varphi)U^* = a^*(u\varphi) + a(j[v\varphi]) + \langle f | \varphi \rangle, \quad (\text{VI.37})$$

für alle  $\varphi \in \mathfrak{h}$  gilt, wobei  $j : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  eine antilineare Involution ist,  $j^2 = \mathbb{1}_{\mathfrak{h}}$ .

- *Fermionische Bogolubov-Transformationen* sind unitäre Transformationen  $U \in \mathcal{B}[\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})]$ , die affin in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind, d.h. für die es beschränkte Operatoren  $u \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  und  $v \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{h})$  so gibt, dass

$$Uc^*(\varphi)U^* = c^*(u\varphi) + c(j[v\varphi]), \quad (\text{VI.38})$$

für alle  $\varphi \in \mathfrak{h}$  gilt, wobei  $j : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  abermals eine antilineare Involution ist,  $j^2 = \mathbb{1}_{\mathfrak{h}}$ .

## VI.4. Die Zweite Quantisierung von 1-Teilchen-Operatoren

**Definition VI.7.** Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum und  $(\omega, \mathfrak{d}) \in \mathcal{L}[\mathfrak{h}]$  ein dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator auf  $\mathfrak{h}$ .

## VI. Die Zweite Quantisierung

- (i) Wir definieren  $d\Gamma^{(0)}(\omega)\Omega = 0$  und  $(d\Gamma^{(k)}(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}^{(k)}[\mathfrak{d}]), (\Gamma^{(k)}(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}^{(k)}[\mathfrak{d}]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{h})]$  für  $k \in \mathbb{N}$  durch lineare Fortsetzung von

$$d\Gamma^{(k)}(\omega)[\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k] := \sum_{j=1}^k \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j-1} \otimes [\omega\varphi_j] \otimes \varphi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \varphi_k, \quad (\text{VI.39})$$

$$\Gamma^{(k)}(\omega)[\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k] := [\omega\varphi_1] \otimes \cdots \otimes [M\varphi_k]. \quad (\text{VI.40})$$

- (ii) Wir definieren die **Zweite Quantisierung**  $(d\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]), (\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  von  $(\omega, \mathfrak{d})$  durch

$$d\Gamma(\omega) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} d\Gamma^{(n)}(\omega), \quad (\text{VI.41})$$

$$\Gamma(\omega) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}(\omega). \quad (\text{VI.42})$$

### Bemerkungen und Beispiele.

- Die Zweite Quantisierungen  $d\Gamma$  und  $\Gamma$  erhalten die Teilchenzahl und lassen den bosonischen und den fermionischen Fock-Raum -als Unterraum des Fock-Raums- jeweils invariant, d.h. für jeden Operator  $(\omega, \mathfrak{d})$  gilt auf  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d})$

$$d\Gamma(\omega)\mathcal{N} = \mathcal{N}d\Gamma(\omega), \quad \Gamma(\omega)\mathcal{N} = \mathcal{N}\Gamma(\omega), \quad (\text{VI.43})$$

$$d\Gamma(\omega)\mathcal{S} = \mathcal{S}d\Gamma(\omega), \quad \Gamma(\omega)\mathcal{S} = \mathcal{S}\Gamma(\omega), \quad (\text{VI.44})$$

$$d\Gamma(\omega)\mathcal{A} = \mathcal{A}d\Gamma(\omega), \quad \Gamma(\omega)\mathcal{A} = \mathcal{A}\Gamma(\omega). \quad (\text{VI.45})$$

- Sind  $a, b \in \mathcal{B}[\mathfrak{h}]$  beschränkte Operatoren, so gelten

$$[d\Gamma(a), d\Gamma(b)] = d\Gamma([a, b]), \quad (\text{VI.46})$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(ab), \quad (\text{VI.47})$$

auf  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ , d.h. die Zweite Quantisierung  $d\Gamma$  erhält Kommutatoren und die Zweite Quantisierung  $\Gamma$  erhält Produkte.

- Inwieweit sich (VI.48) oder (VI.49) auf unbeschränkte Operatoren  $a$  und  $b$  übertragen lassen, ist stark kontextabhängig und schwer allgemein zu formulieren.
- Wir haben in Kapitel III bereits Schrödinger-Operatoren  $h = -\Delta + V(x)$  auf  $\mathcal{D}_h \subseteq \mathfrak{h} := L^2(\mathbb{R}^d)$  auf Selbstadjungiertheit untersucht und festgestellt, dass diese unter geeigneten Annahmen an  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ein Standardspektrum der Form  $\sigma(h) = \sigma_{\text{disc}}(h) \dot{\cup} \sigma_{\text{ess}}(h)$  mit isolierten, nach unten beschränkten, negativen Eigenwerten  $\{e_0, e_1, e_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}^-$  jeweils endlicher Multiplizität und essentiellm Spektrum  $\sigma_{\text{ess}}(h) = \mathbb{R}_0^+$  auf der nichtnegativen Halbachse besitzen. Diese Schrödinger-Operatoren sind die Erzeuger der durch die Schrödinger-Gleichung

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad i \partial_t \psi_t = h\psi_t, \quad \psi_t|_{t=0} = \psi_0 \quad (\text{VI.48})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

gegebenen Dynamik

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \psi_t = \exp[-ith] \psi_0 \quad (\text{VI.49})$$

eines ( $n = 1$ ) nichtrelativistischen quantenmechanischen Teilchens in  $\mathbb{R}^d$ , das sich im Potenzialfeld  $V$  in  $\mathbb{R}^d$  bewegt.

- Betrachten wir nun ein System  $n \geq 2$  gleiche solcher Teilchen, so werden ihre quantenmechanischen Zustände durch normierte Vektoren im Tensorproduktraum  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}^{dN})$  dargestellt. Stehen die Teilchen nicht in Wechselwirkung miteinander, so sind ihre Bewegungen unabhängig voneinander. Bezeichnet  $\psi_0^{(n)} \in \mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$  einen normierten Anfangsvektor, so wird die Dynamik nun durch den Schrödinger-Gleichung

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad i \partial_t \psi_t^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = h^{(n)} \psi_t^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad \psi_t^{(n)}|_{t=0} = \psi_0^{(n)} \quad (\text{VI.50})$$

auf  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$  bestimmt. Dabei ist der Schrödinger-Operator  $(h^{(n)}(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}^{(n)}[\mathcal{D}_h]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})]$  durch

$$h^{(n)} := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}^{\otimes(j-1)} \otimes h \otimes \mathbb{1}^{\otimes(n-j)} \quad (\text{VI.51})$$

definiert, d.h. konkret durch

$$[h^{(n)} \psi^{(n)}](x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n [(-\Delta_{x_j} + V(x)) \psi^{(n)}](x_1, \dots, x_n). \quad (\text{VI.52})$$

Die  $n$ -Teilchen-Schrödinger-Gleichung (VI.50) wird durch

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \psi_t^{(n)} = \exp[-ith^{(n)}] \psi_0^{(n)} = \left( \bigotimes_{j=1}^n \exp[-ith] \right) \psi_0^{(n)} \quad (\text{VI.53})$$

gelöst.

- Ein wesentlicher konzeptioneller Unterschied der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik ist die Tatsache, dass quantenmechanische Zustände auch Superpositionen von Vektoren zulassen – insbesondere auch solche zu verschiedenen Teilchenzahlen. Im Allgemeinen wird deshalb ein System (unbestimmt) vieler gleicher Teilchen durch normierte Vektoren  $\Psi_t = (\psi_t^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  beschrieben, die der Schrödinger-Gleichung

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad i \partial_t \Psi_t = d\Gamma(h) \Psi_t = (h^{(n)} \psi_t^{(n)})_{n=0}^{\infty} \quad (\text{VI.54})$$

und der Vorgabe eines Anfangswerts beschrieben, wobei  $(d\Gamma(h), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathcal{D}_h])$  die Zweite Quantisierung von  $h$  ist. Die Lösung der Vielteilchen-Schrödinger-Gleichung erhält man durch den anderen Teil  $(\Gamma(e^{-ith}), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathcal{D}_h])$  der Zweiten Quantisierung, nämlich

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \Psi_t = \exp[-itd\Gamma(h)] \Psi_0 = \Gamma(e^{-ith}) \Psi_0. \quad (\text{VI.55})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

- Die Notation  $d\Gamma(h)$  und  $\Gamma(e^{-ith})$  geht auf Nelson zurück. Glg. (VI.55) spiegelt sehr schön die ursprüngliche Intention für die Namensgebung wider:  $t \mapsto \Gamma(e^{-ith})$  ist eine stark stetige unitäre Gruppe auf  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  und  $d\Gamma(h)$  ihr (infinitesimaler) Erzeuger, was auch durch das „d“ in „d $\Gamma$ “ angedeutet wird.

Diese Beobachtung des Zusammenhangs zwischen  $d\Gamma$  und  $\Gamma$  führt auch auf den Beweis des folgenden Lemmas

**Satz VI.8.** *Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum und  $(\omega, \mathfrak{d}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{h}]$  ein wesentlich selbstadjungierter Operator auf  $\mathfrak{h}$ . Dann ist auch seine Zweite Quantisierung  $(d\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  wesentlich selbstadjungiert.*

*Beweis.* Wir verwenden den Satz I.8 von Stone, demgemäß die wesentliche Selbstadjungiertheit eines dicht definierten, abschließbaren Operators  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  gleichwertig mit der Aussage ist, dass sein Abschluss  $(\overline{A}, \overline{\mathcal{D}}) \supseteq (A, \mathcal{D})$  eine  $C_0$ -Gruppe  $\{e^{-itA}\}_{t \in \mathbb{R}}$  unitärer Operatoren auf  $\mathfrak{H}$  erzeugt.

Da  $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{h}$  dicht ist, ist auch  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}] \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  dicht, s. (VI.23)(VI.24). Folglich sind  $(\omega, \mathfrak{d}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{h}]$  und  $(d\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  beide dicht definiert.

Da  $(\omega, \mathfrak{d})$  wesentlich selbstadjungiert ist, ist  $(\omega, \mathfrak{d})$  symmetrisch. Die impliziert sofort die Symmetrie von  $(d\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}])$  und daraus folgt nach Lemma I.5 ( $v$ ) auch dessen Abschließbarkeit.

Sei nun  $\{v_t := e^{-it\bar{\omega}}\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}[\mathfrak{h}]$  die vom Abschluss  $(\bar{\omega}, \bar{\mathfrak{d}}) \supseteq (\omega, \mathfrak{d})$  von  $(\omega, \mathfrak{d})$  erzeugte  $C_0$ -Gruppe unitärer Operatoren auf  $\mathfrak{h}$ . Wir definieren durch  $U_t := \Gamma(v_t)$  eine Familie  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  beschränkter Operatoren auf  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$ . Man prüft leicht nach, dass  $\Gamma(a)^* = \Gamma(a^*)$  für jeden beschränkten Operator  $a \in \mathcal{B}[\mathfrak{h}]$  gilt. Also gilt auch  $U_t^* = \Gamma(v_t)^* = \Gamma(v_t^*)$ , was zusammen mit (VI.49) auf

$$U_t^* U_t = \Gamma(v_t^*) \Gamma(v_t) = \Gamma(v_t^* v_t) = \Gamma(\mathbb{1}_{\mathfrak{h}}) = \mathbb{1}_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h})} \quad (\text{VI.56})$$

führt. Analog erhält man  $U_t U_t^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h})}$  und damit dann die Unitarität von  $U_t$ .

Sei  $\Psi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h})$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\Psi_{\text{fin}} \in \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]$  so, dass  $\|\Psi - \Psi_{\text{fin}}\|_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h})} \leq \varepsilon$ . Nach Definition von  $\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]$  gibt es ein  $L \in \mathbb{N}$  und  $\psi_1, \dots, \psi_L \in \mathfrak{d}$  sowie Koeffizienten  $c^{(n)} : (\mathbb{Z}_1^L)^n \rightarrow D_{\mathbb{C}}(0, L)$  für  $n \in \mathbb{Z}_0^L$  so, dass

$$\Psi_{\text{fin}} = \sum_{n=0}^L \sum_{k(1), \dots, k(n)=1}^L c^{(n)}[k(1), \dots, k(n)] \psi_{k(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)}. \quad (\text{VI.57})$$

Da  $\{v_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  eine  $C_0$ -Gruppe ist, ist  $\lim_{t \rightarrow 0} \{v_t \psi_k\} = \psi_k$ , für alle  $k \in \mathbb{Z}_1^L$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \{U_t \Psi_{\text{fin}}\} &= \sum_{n=0}^L \sum_{k(1), \dots, k(n)=1}^L c^{(n)}[k(1), \dots, k(n)] \lim_{t \rightarrow 0} \{(v_t \psi_{k(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_t \psi_{k(n)})\} \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k(1), \dots, k(n)=1}^L c^{(n)}[k(1), \dots, k(n)] \psi_{k(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)} = \Psi_{\text{fin}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

Wir erhalten daraus und aus der Unitarität von  $U_t$  sowie der Dreiecksungleichung, dass

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|U_t \Psi - \Psi\| \leq 2 \|\Psi - \Psi_{\text{fin}}\| + \limsup_{t \rightarrow 0} \|U_t \Psi_{\text{fin}} - \Psi_{\text{fin}}\| \leq 2\varepsilon, \quad (\text{VI.59})$$

und im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  auch  $\lim_{t \rightarrow 0} U_t \Psi = \Psi$ , also die starke Stetigkeit von  $t \mapsto U_t$  bei  $t = 0$  und vermöge der Gruppeneigenschaft damit auch für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Es folgt, dass  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  eine  $C_0$ -Gruppe unitärer Operatoren auf  $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$  ist, dessen Erzeuger  $(H, \mathcal{D}_H) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}(\mathfrak{h})]$  nach Satz I.7 von Stone selbstadjungiert ist. Ist  $\Psi_{\text{fin}} \in \mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}]$  wie in (VI.57), so erhalten wir ähnlich wie in (VI.58) zunächst

$$\begin{aligned} U_t \Psi_{\text{fin}} - \Psi_{\text{fin}} &= \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k(1), \dots, k(n)=1}^L c^{(n)}[k(1), \dots, k(n)] \{ (v_t \psi_{k(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_t \psi_{k(n)}) - \psi_{k(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)} \}, \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

und weiter

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} [(v_t \psi_{k(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_t \psi_{k(n)}) - \psi_{k(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)}] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (v_t \psi_{k(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_t \psi_{k(j-1)}) \otimes \left( \frac{v_t \psi_{k(j)} - \psi_{k(j)}}{t} \right) \otimes \psi_{k(j+1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \psi_{k(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(j-1)} \otimes (-i\omega \psi_{k(j)}) \otimes \psi_{k(j+1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{k(n)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.61})$$

wobei wir die starke Stetigkeit von  $v_t$ , den Satz von Stone, angewandt auf  $v_t$ , und die Selbstadjungiertheit von  $\bar{\omega}$  auf  $\bar{\mathfrak{d}}$  und die Übereinstimmung von  $\bar{\omega}$  und  $\omega$  auf  $\mathfrak{d} \ni \psi_k$  verwenden. Setzen wir (VI.61) in (VI.60) ein, so erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{U_t \Psi_{\text{fin}} - \Psi_{\text{fin}}}{t} \right\} = -id\Gamma(\omega) \Psi_{\text{fin}}. \quad (\text{VI.62})$$

Aus (VI.62) folgt, dass  $\Psi_{\text{fin}} \in \mathcal{D}_H$  und  $H\Psi_{\text{fin}} = d\Gamma(\omega)\Psi_{\text{fin}}$  gilt. Da  $\Psi_{\text{fin}} \in \mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d})$  beliebig gewählt werden kann, folgt, dass  $(H, \mathcal{D}_H)$  eine selbstadjungierte Fortsetzung von  $(d\Gamma(\omega), \mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathfrak{d}))$  und letzterer Operator damit wesentlich selbstadjungiert ist.  $\square$

Die Operatoren  $d\Gamma(h)$  und  $\Gamma(e^{-ith})$  lassen zwar jeweils die  $n$ -Teilchen-Hilbert-Räume  $\mathfrak{F}^{(n)}(\mathfrak{h})$  invariant, trotzdem ist es bequem und auch aus analytischen Gründen vorteilhaft (aber eben nicht zwingend notwendig), die Erzeuger  $d\Gamma(h)$  durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auszudrücken.

**Satz VI.9.** *Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum,  $(\omega, \mathfrak{d}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{h}]$  ein wesentlich selbstadjungierter Operator auf  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{b} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{d}$  eine ONB in  $\mathfrak{h}$ .*

(i) *Dann genügt die Zweite Quantisierung  $(d\Gamma(\omega), \mathcal{S}(\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}])) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_{\text{b}}(\mathfrak{h})]$  der Gleichung*

$$d\Gamma(\omega) = \sum_{k, \ell=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_{\ell} \rangle a^*(\varphi_k) a(\varphi_{\ell}). \quad (\text{VI.63})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

(ii) Dann genügt die Zweite Quantisierung  $(d\Gamma(\omega), \mathcal{A}(\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}])) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})]$  der Gleichung

$$d\Gamma(\omega) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell). \quad (\text{VI.64})$$

*Beweis.* Wir zeigen nur (VI.64), und dafür reicht es, diese Identität für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auf Vektoren der Form  $\varphi_{k(1)} \wedge \cdots \wedge \varphi_{k(n)}$  für  $\varphi_{k(1)}, \dots, \varphi_{k(n)} \in \mathfrak{h}$  zu zeigen. O.B.d.A. können wir der Einfachheit halber  $k(1) = 1, \dots, k(n) = n$  annehmen. Außerdem verwenden wir, dass  $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega$  gilt.

Zunächst beobachten wir, dass gemäß der CAR und mit  $c(\varphi_\ell) \Omega = 0$

$$\begin{aligned} & c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell) c^*(\varphi_1) c^*(\varphi_2) c^*(\varphi_3) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega & (\text{VI.65}) \\ &= c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell) c^*(\varphi_1) c^*(\varphi_2) c^*(\varphi_3) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega - c^*(\varphi_1) c^*(\varphi_2) c^*(\varphi_3) \cdots c^*(\varphi_n) c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell) \Omega \\ &= \sum_{j=1}^n c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_{j-1}) [c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell), c^*(\varphi_j)] c^*(\varphi_{j+1}) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \varphi_\ell | \varphi_j \rangle c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_{j-1}) c^*(\varphi_k) c^*(\varphi_{j+1}) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell) c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega & (\text{VI.66}) \\ &= \sum_{j=1}^n c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_{j-1}) \left( \sum_{k,\ell=1}^{\infty} c^*(\varphi_k) \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle \langle \varphi_\ell | \varphi_j \rangle \right) c^*(\varphi_{j+1}) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Linearität der Abbildung  $\varphi \mapsto c^*(\varphi)$ , dass

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^{\infty} c^*(\varphi_k) \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle \langle \varphi_\ell | \varphi_j \rangle &= c^* \left( \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle \langle \varphi_\ell | \varphi_j \rangle \varphi_k \right) = c^* \left( \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_j \rangle \varphi_k \right) \\ &= c^*(\omega \varphi_j), & (\text{VI.67}) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle \varphi_k | \omega \varphi_\ell \rangle c^*(\varphi_k) c(\varphi_\ell) c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega \\
 &= \sum_{j=1}^n c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_{j-1}) c^*(\omega \varphi_j) c^*(\varphi_{j+1}) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega \\
 &= \mathcal{A}^{(n)} \left( \sum_{j=1}^n \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{j-1} \otimes (\omega \varphi_j) \otimes \varphi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \varphi_n \right) \\
 &= \mathcal{A}^{(n)} \left( d\Gamma^{(n)}(\omega) [\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n] \right) \tag{VI.68} \\
 &= d\Gamma^{(n)}(\omega) \left[ \mathcal{A}^{(n)}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) \right] = d\Gamma^{(n)}(\omega) [\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n],
 \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwenden, dass  $d\Gamma^{(n)}(\omega)$  gemäß (VI.43)-(VI.45) die Teilchenzahl erhält und mit der Projektion  $\mathcal{A}^{(n)}$  vertauscht.  $\square$

Besitzt der Operator  $\omega$  aus Satz VI.9 eine ONB  $\mathfrak{b} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{d}$  aus Eigenvektoren, so nimmt die Zweite Quantisierung (VI.63) bzw. (VI.64) eine besonders einfache Gestalt an. Dies formulieren wir im folgenden Korollar.

**Korollar VI.10.** *Seien  $\mathfrak{h}$  ein Hilbert-Raum,  $(\omega, \mathfrak{d}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{h}]$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathfrak{h}$ . Existiert eine ONB  $\mathfrak{b} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{d}$  in  $\mathfrak{h}$  aus Eigenvektoren von  $\omega$ , sodass  $\omega \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ , so gelten*

$$d\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^*(\varphi_k) a(\varphi_k), \tag{VI.69}$$

für  $(d\Gamma(\omega), \mathcal{S}(\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}])) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})]$  und

$$d\Gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c^*(\varphi_k) c(\varphi_k), \tag{VI.70}$$

für  $(d\Gamma(\omega), \mathcal{A}(\mathfrak{F}_{\text{fin}}[\mathfrak{d}])) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})]$ .

## VI.5. Punktweise Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Für viele physikalische Systeme ist der 1-Teilchen-Hilbert-Raum der Raum  $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^d)$  komplexer quadratintegrabler Funktionen über dem Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^d$ , und die wichtigsten Operatoren sind Multiplikationsoperatoren wie Potenziale  $V$ , die für  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  durch

## VI. Die Zweite Quantisierung

$[V\psi](x) := V(x)\psi(x)$  definiert sind, und Differenzialoperatoren wie  $-\Delta$ , die als Multiplikationsoperator in der Fourierdarstellung wirken,  $\mathcal{F}[-\Delta\psi](p) = p^2\mathcal{F}[\psi](p)$ . Diese für die Anwendung zentralen Operatoren besitzen keine ONB aus Eigenvektoren, sondern nur sogenannte uneigentliche Eigenvektoren, wie  $\psi_k(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-ik\cdot x}$ , die zwar die Eigenwertgleichung  $[-\Delta\psi_k](x) = k^2\psi_k(x)$  punktweise erfüllen, aber nicht quadratintegrabel und somit keine Hilbert-Raum-Elemente sind.

Ignoriert man diesen Punkt, so wird man von (VI.69) auf

$$d\Gamma(-\Delta) = \int_{\mathbb{R}^d} k^2 \hat{a}_k^* \hat{a}_k d^d k \quad (\text{VI.71})$$

für die bosonische Zweite Quantisierung von  $(-\Delta, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)) \in \mathfrak{L}[L^2(\mathbb{R}^d)]$  geführt. [Eine entsprechende Gleichung gilt auch im fermionischen Fall.] Die Wirkung von  $\hat{a}_k$  für festes  $k \in \mathbb{R}^d$  auf  $n+1$ -Teilchen-Vektoren muss dann durch

$$[\hat{a}_k \psi^{(n+1)}](x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \int e^{ik\cdot y} \psi^{(n)}(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_j, \dots, x_n) \frac{d^d y}{(2\pi)^{d/2}} \quad (\text{VI.72})$$

festgelegt werden. Man sieht sofort, dass die rechte Seite für genügend reguläre Funktionen definiert ist; so ist offensichtlich  $\hat{a}_k : \mathcal{S}[\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}^d))] \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}^d))]$  auf endlichen Vektoren, deren Komponenten Schwartzsche Testfunktionen  $\mathcal{S}_d(\mathbb{R}^d)$  sind, dicht definiert und bildet diese in sich ab. Das zentrale Problem mit dieser Definition von  $\hat{a}_k$  ist jedoch, dass  $(\hat{a}_k, \mathcal{S}[\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathcal{S}_d(\mathbb{R}^d))]) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))]$  nicht abschließbar ist, s. Übungsaufgabe 01.2. Dies hat nach Lemma I.5 zur Folge, dass der adjungierte Operator  $(\hat{a}_k^*, \text{dom}[\hat{a}_k^*])$  nicht dicht definiert ist. Hier gilt gemäß (VI.72)

$$[\hat{a}_k^* \psi^{(n)}](x_1, \dots, x_{n+1}) := \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{e^{-ik\cdot x_j}}{(2\pi)^{d/2}} \psi^{(n)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}), \quad (\text{VI.73})$$

und weil die rechte Seite nie quadratintegrabel ist sogar konkret  $\text{dom}[\hat{a}_k^*] = \{0\}$  – egal, wie regulär man  $\psi^{(n)}$  wählt! Dass die Definition von  $\hat{a}_k$  nur unter starken Regularitätsannahmen und die Definition von  $\hat{a}_k^*$  sogar unmöglich ist, ist besonders ärgerlich, da diese in der theoretischen Physik überall verwendet werden. Es gibt zahlreiche alternative Konstruktionen, die jedoch alle kompliziert und umständlich sind.

Wir wählen hier die Interpretation von  $a_x$  und  $a_x^*$  als **operatorwertige Distribution**, d.h. wir definieren die Familien  $\{a_x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$  und  $\{a_x^*\}_{x \in \mathbb{R}^d}$  durch

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}^d) : \quad a(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)} a_x d^d x, \quad a^*(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) a_x^* d^d x, \quad (\text{VI.74})$$

also als formale operatorwertige Distributionskerne. Mit ihnen werden die CCR auf dem Fock-Raum zu

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : \quad [a_x, a_y] = [a_x^*, a_y^*] = 0, \quad [a_x, a_y^*] = \delta(x - y), \quad a_x \Omega = 0, \quad (\text{VI.75})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

wobei diese Gleichungen formal und so zu verstehen sind, dass sie erst durch Integration über quadratintegrale oder noch reguläre Funktionen zu sinnvollen mathematischen Aussagen werden. Ist man sich dieser Einschränkung bewusst und überinterpretiert sie nicht, so sind die Identitäten (VI.75) für praktische Berechnungen überaus nützlich.

Für eine Schwartzsche Testfunktion ist  $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{ik \cdot x} \hat{\varphi}(k) d^d k$ , und wir erhalten aus

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(k) \hat{a}_k^* d^d k := a^*(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) a_x^* d^d x = \iint_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(k) e^{ik \cdot x} a_x^* \frac{d^d k d^d x}{(2\pi)^{d/2}}, \quad (\text{VI.76})$$

(nur formal, da Fubini hier nicht anwendbar ist) dass

$$\hat{a}_k^* = \int e^{ik \cdot x} a_x^* \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} = \mathcal{F}[a_{(\cdot)}^*](-k), \quad (\text{VI.77})$$

wobei  $\mathcal{F}$  die (formale) Fourier-Transformation notiert. Weiterhin durch formales Adjungieren

$$\hat{a}_k = \int e^{-ik \cdot x} a_x \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} = \mathcal{F}^*[a_{(\cdot)}](-k), \quad (\text{VI.78})$$

in Übereinstimmung mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{\varphi}(k)} \hat{a}_k d^d k := a(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)} a_x d^d x = \iint_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{\varphi}(k)} e^{-ik \cdot x} a_x \frac{d^d k d^d x}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (\text{VI.79})$$

Die bosonischen und fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ermöglichen es, die Struktur des bosonischen Fock-Raums  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$  und des fermionischen Fock-Raums  $\mathfrak{F}_f(\mathfrak{h})$  mit ihren unterliegenden  $n$ -Teilchen-Hilbert-Räumen  $\mathfrak{F}_b^{(n)}(\mathfrak{h})$  bzw.  $\mathfrak{F}_f^{(n)}(\mathfrak{h})$  völlig zu vergessen und alle Rechnungen nur auf der totalen Menge

$$\mathfrak{D}_b := \{a^*(\varphi_1) \cdots a^*(\varphi_n) \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{F}_b(\mathfrak{h}) \quad \text{bzw.} \quad (\text{VI.80})$$

$$\mathfrak{D}_f := \{c^*(\varphi_1) \cdots c^*(\varphi_n) \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{F}_f(\mathfrak{h}) \quad (\text{VI.81})$$

durchzuführen und anschließend mit linearer und dann stetiger Fortsetzung zu argumentieren.

Im Fall, dass  $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^d)$  ist man in der theoretischen Physik wenig zimperlich, überträgt (VI.80) [und analog auch (VI.81), wir beschränken uns jetzt im Weiteren aber auf den bosonischen Fall] auf die punktwweisen Erzeugungsoperatoren  $a_x^*$  und  $\hat{a}_k^*$  und berechnet die Wirkung von Operatoren nur auf Vektoren der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_b^{(x)} &:= \{a_{x(1)}^* \cdots a_{x(n)}^* \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0, x(1), \dots, x(n) \in \mathbb{R}^d\} \quad \text{und} \\ \mathfrak{D}_b^{(k)} &:= \{\hat{a}_{k(1)}^* \cdots \hat{a}_{k(n)}^* \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0, k(1), \dots, k(n) \in \mathbb{R}^d\}. \end{aligned} \quad (\text{VI.82})$$

Dabei wird außer acht gelassen, dass  $a_{x(1)}^* \cdots a_{x(n)}^* \Omega$  und  $\hat{a}_{k(1)}^* \cdots \hat{a}_{k(n)}^* \Omega$  gar keine Elemente des Fock-Raums  $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$  sind.

Es gibt jedoch eine mathematisch sinnvolle Interpretation von (VI.82), die wir jetzt skizzieren. Dazu rufen wir nochmals die Konstruktion des Fock-Raums  $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{h})$  speziell im Fall  $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^d)$

## VI. Die Zweite Quantisierung

in Erinnerung: Für  $n = 0$  ist  $\mathfrak{F}_b^{(0)}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \mathbb{C} \cdot \Omega$ , und für  $n \geq 1$  ist

$$\mathfrak{F}_b^{(n)}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \left\{ \psi^{(n)} \in L^2[(\mathbb{R}^d)^n] \mid \forall \pi \in \mathcal{S}_n \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}^d : \right. \quad (\text{VI.83})$$

$$\left. \psi^{(n)}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}) = \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \right\}$$

mit Skalarprodukt

$$\langle \varphi^{(n)} | \psi^{(n)} \rangle_{\mathfrak{F}_b^{(n)}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \int \overline{\varphi^{(n)}(k^{(n)})} \psi^{(n)}(k^{(n)}) dk^{(n)}, \quad (\text{VI.84})$$

wobei wir die neue Notation

$$k^{(n)} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \quad \text{und} \quad \int f(k^{(n)}) dk^{(n)} := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(k_1, \dots, k_n) d^d k_1 \cdots d^d k_n \quad (\text{VI.85})$$

verwenden. Der bosonische Fock-Raum  $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$  ist der Hilbert-Raum der Folgen

$$\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d)) = \left\{ \Psi := (\psi^{(n)})_{n=0}^\infty \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : \psi^{(n)} \in \mathfrak{F}_b^{(n)}, \langle \Psi | \Psi \rangle_{\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))} < \infty \right\}, \quad (\text{VI.86})$$

wobei das Skalarprodukt auf  $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$  für  $\Phi := (\varphi^{(n)})_{n=0}^\infty$  und  $\Psi := (\psi^{(n)})_{n=0}^\infty$  durch

$$\langle \Phi | \Psi \rangle_{\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))} := \sum_{n=0}^\infty \langle \varphi^{(n)} | \psi^{(n)} \rangle_{\mathfrak{F}_b^{(n)}(L^2(\mathbb{R}^d))} \quad (\text{VI.87})$$

definiert ist. Seien nun

$$\Phi = (\varphi^{(0)}\Omega, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(M)}, 0, 0, \dots), \quad \Psi = (\psi^{(0)}\Omega, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)}, 0, 0, \dots) \quad (\text{VI.88})$$

zwei endliche Vektoren in  $\mathcal{S}[\mathfrak{F}_{\text{fin}}(L^2(\mathbb{R}^d))]$  und weiterhin

$$A_\Phi := \sum_{m=0}^M \int \varphi^{(m)}(k^{(m)}) \frac{\hat{a}^*(k^{(m)})}{\sqrt{m!}} dk^{(m)}, \quad A_\Psi := \sum_{n=0}^N \int \psi^{(n)}(k^{(n)}) \frac{\hat{a}^*(k^{(n)})}{\sqrt{n!}} dk^{(n)}, \quad (\text{VI.89})$$

wobei

$$\hat{a}^*(k^{(n)}) := \hat{a}_{k_n}^* \hat{a}_{k_{n-1}}^* \cdots \hat{a}_{k_1}^* \quad \text{und} \quad \hat{a}(\tilde{k}^{(m)}) := \hat{a}_{\tilde{k}_1} \hat{a}_{\tilde{k}_2} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_m}. \quad (\text{VI.90})$$

Für  $m \geq n$  berechnen wir mit Hilfe der CCR, dass

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\tilde{k}_1} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_m} \hat{a}_{k_n}^* \cdots \hat{a}_{k_1}^* \Omega &= \sum_{\nu(1)=1}^n \delta(\tilde{k}_m - k_{\nu(1)}) \hat{a}_{\tilde{k}_1} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_{m-1}} \hat{a}_{k_n}^* \cdots \hat{a}_{k_{\nu(1)}}^* \cdots \hat{a}_{k_1}^* \Omega \\ &= \sum_{\nu(2)=1}^n \sum_{\nu(1)=1}^n \delta_{\nu(1), \nu(2)}^\perp \delta(\tilde{k}_{m-1} - k_{\nu(2)}) \delta(\tilde{k}_m - k_{\nu(1)}) \\ &\quad \hat{a}_{\tilde{k}_1} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_{m-2}} \hat{a}_{k_n}^* \cdots \hat{a}_{k_{\nu(1)}}^* \cdots \hat{a}_{k_{\nu(2)}}^* \cdots \hat{a}_{k_1}^* \Omega \\ &= \sum_{\nu(n)=1}^n \cdots \sum_{\nu(1)=1}^n \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} \delta_{\nu(i), \nu(j)}^\perp \right) \left( \prod_{j=1}^n \delta(\tilde{k}_{m-j+1} - k_{\nu(j)}) \right) \hat{a}_{\tilde{k}_1} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_{m-n-1}} \Omega \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} \left( \prod_{j=1}^n \delta(\tilde{k}_{m-j+1} - k_{\nu(j)}) \right) \hat{a}_{\tilde{k}_1} \cdots \hat{a}_{\tilde{k}_{m-n-1}} \Omega, \end{aligned} \quad (\text{VI.91})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

wobei  $\delta_{i,j}^\perp := 1 - \delta_{i,j}$  und wir im letzten Schritt verwenden, dass die paarweise verschiedenen  $n$ -Tupel  $\nu(1), \dots, \nu(n) \in \mathbb{Z}_1^n$  gerade die Permutationen  $\nu : \mathbb{Z}_1^n \rightarrow \mathbb{Z}_1^n$  sind. Für  $m > n$  folgt daraus

$$\langle \hat{a}^*(\tilde{k}^{(m)})\Omega | \hat{a}^*(k^{(n)})\Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{a}(\tilde{k}^{(m)}) \hat{a}^*(k^{(n)})\Omega \rangle = 0, \quad (\text{VI.92})$$

was sich analog auch für  $m < n$  ergibt. Also ist

$$\langle \hat{a}^*(\tilde{k}^{(m)})\Omega | \hat{a}^*(k^{(n)})\Omega \rangle = \delta_{m,n} \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} \left( \prod_{j=1}^n \delta(\tilde{k}_{n-j+1} - k_{\nu(j)}) \right) = \delta_{m,n} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \left( \prod_{j=1}^n \delta(\tilde{k}_j - k_{\pi(j)}) \right). \quad (\text{VI.93})$$

Dies setzen wir in  $\langle A_\Phi \Omega | A_\Psi \Omega \rangle$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} \langle A_\Phi \Omega | A_\Psi \Omega \rangle &= \sum_{m,n=0}^{M+N} \int \frac{\overline{\varphi^{(m)}(\tilde{k}^{(m)})}}{\sqrt{m!}} \frac{\psi^{(n)}(k^{(n)})}{\sqrt{n!}} \langle \hat{a}^*(\tilde{k}^{(m)})\Omega | \hat{a}^*(k^{(n)})\Omega \rangle dk^{(n)} d\tilde{k}^{(m)} \\ &= \sum_{n=0}^{M \wedge N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \int \overline{\varphi^{(n)}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)})} \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) dk^{(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{M \wedge N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \int \overline{\varphi^{(n)}(k_1, \dots, k_n)} \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) dk^{(n)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.94})$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie von  $\varphi^{(n)}$  unter Permutationen der Argumente benutzen. Also ist

$$\langle A_\Phi \Omega | A_\Psi \Omega \rangle = \sum_{n=0}^{M \wedge N} \int \overline{\varphi^{(n)}(k_1, \dots, k_n)} \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) dk^{(n)} = \langle \Phi | \Psi \rangle, \quad (\text{VI.95})$$

d.h. wir können  $\Phi$  mit  $A_\Phi \Omega$  und  $\Psi$  mit  $A_\Psi \Omega$  identifizieren, etwa

$$\Psi = A_\Psi \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\psi^{(n)}(k^{(n)})}{\sqrt{n!}} \hat{a}^*(k^{(n)})\Omega dk^{(n)}. \quad (\text{VI.96})$$

Im Sinne solcher Integrale, wie (VI.96), können wir  $\{\hat{a}^*(k^{(n)})\Omega | n \in \mathbb{N}_0, k^{(n)} \in [\mathbb{R}^d]^n\}$  als totale Menge im bosonischen Fock-Raum  $\mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$  betrachten und Operatoren allein durch ihre Wirkung auf  $\hat{a}^*(k^{(n)})\Omega$  zu studieren.

Wir überprüfen nun (VI.71) in etwas allgemeinerer Form, d.h. für Fouriermultiplikatoren  $\omega$ . Ist  $\Psi = (\psi^{(0)}\Omega, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{S}[\mathfrak{F}_{\text{fin}}(\mathcal{S}_d)]$ , so ist

$$d\Gamma(\omega)\Psi = (\hat{\psi}^{(0)}\Omega, \hat{\psi}^{(1)}, \dots, \hat{\psi}^{(N)}, 0, 0, \dots), \quad (\text{VI.97})$$

mit

$$\hat{\psi}^{(n)}(k^{(n)}) = \omega(k^{(n)}) \cdot \psi^{(n)}(k^{(n)}), \quad \omega(k^{(n)}) := \sum_{\nu=1}^n \omega(k_\nu). \quad (\text{VI.98})$$

## VI. Die Zweite Quantisierung

Andererseits sind mit

$$d\Gamma(\omega) = \int \omega(k) \hat{a}_k^* a_k d^d k \quad (\text{VI.99})$$

und den CCR auch

$$\begin{aligned} d\Gamma(\omega) a^*(k^{(n)})\Omega &= \int \omega(k) \hat{a}_k^* a_k a_{k_n}^* \cdots a_{k_1}^* \Omega d^d k \\ &= \sum_{\nu=1}^n \int \omega(k) \delta(k - k_\nu) a_{k_n}^* \cdots a_{k_{\nu+1}}^* \hat{a}_k^* a_{k_{\nu-1}}^* \cdots a_{k_1}^* \Omega d^d k \\ &= \sum_{\nu=1}^n \int \omega(k_\nu) \delta(k - k_\nu) a_{k_n}^* \cdots a_{k_{\nu+1}}^* \hat{a}_{k_\nu}^* a_{k_{\nu-1}}^* \cdots a_{k_1}^* \Omega d^d k \\ &= \left( \sum_{\nu=1}^n \int \omega(k_\nu) \right) a_{k_n}^* \cdots a_{k_1}^* \Omega = \omega(k^{(n)}) a^*(k^{(n)})\Omega, \end{aligned} \quad (\text{VI.100})$$

was nach Multiplikation mit  $(n!)^{-1/2} \psi^{(n)}(k^{(n)})$ , Integration über  $k^{(n)}$  und anschließender Summation auf (VI.97) und (VI.98) führt.