

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

In diesem Kapitel steht eine alternative Methode zur störungstheoretischen Analyse des Spektralproblems $H_\beta = T + \beta V$ im Mittelpunkt: die *glatte Feshbach-Schur-Abbildung* [?].

V.1. Feshbach-Schur-Paare und Isospektralität

Definition V.1. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $(H, \mathcal{D}), (T, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zwei auf $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H}$ dicht definierte, abgeschlossene lineare Operatoren auf \mathfrak{H} . Seien weiterhin $\chi, \bar{\chi} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zwei beschränkte lineare Operatoren auf \mathfrak{H} , die \mathcal{D} invariant lassen, untereinander und mit T kommutieren und eine Partition der Eins definieren,

$$\chi(\mathcal{D}), \bar{\chi}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}, \quad \chi\bar{\chi} = \bar{\chi}\chi, \quad T\chi = \chi T, \quad T\bar{\chi} = \bar{\chi}T, \quad \chi^2 + \bar{\chi}^2 = \mathbb{1}. \quad (\text{V.1})$$

Weiterhin seien mit $W := H - T$ der lineare Operator $(W, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ relativ T -beschränkt mit relativer Schranke $a \leq 1/2$,

$$W_\chi := \chi W \chi, \quad W_{\bar{\chi}} := \bar{\chi} W \bar{\chi}, \quad (\text{V.2})$$

$$H_\chi := T + W_\chi, \quad H_{\bar{\chi}} := T + W_{\bar{\chi}}, \quad (\text{V.3})$$

und $H_{\bar{\chi}}$ auf $\text{Ran}(\bar{\chi})$ beschränkt invertibel. Dann heißt (H, T) ein **Feshbach-Schur-Paar** zu χ . Die **glatte Feshbach-Schur-Abbildung** $(H, T) \mapsto F_\chi(H, T)$ ist durch den linearen Operator

$$F_\chi(H, T) := T + W_\chi - \chi W_{\bar{\chi}} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \quad (\text{V.4})$$

definiert. Außerdem definieren wir zum Feshbach-Schur-Paar (H, T) noch die beschränkten linearen Operatoren $Q_\chi(H, T) \in \mathcal{B}(\text{Ran}[\chi]; \mathcal{H})$ und $Q_\chi^\#(H, T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}; \text{Ran}[\chi])$ durch

$$Q_\chi(H, T) := \chi - \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \quad \text{und} \quad Q_\chi^\#(H, T) := \chi - \chi W_{\bar{\chi}} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi}. \quad (\text{V.5})$$

Das zum Feshbach-Schur-Paar (H, T) gehörige Bild $F_\chi(H, T)$ unter der glatten Feshbach-Schur-Abbildung ist zu H im Sinne des folgenden Satzes *isospektral*.

Satz V.2 (Isospektralität). *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $(H, \mathcal{D}), (T, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zwei auf $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H}$ dicht definierte, abgeschlossene lineare Operatoren auf \mathfrak{H} . Seien weiterhin $\chi, \bar{\chi} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zwei beschränkte lineare Operatoren auf \mathfrak{H} , die (V.1) erfüllen. Das zu χ gehörige Feshbach-Schur-Paar (H, T) und ihr Bild $F_\chi(H, T)$ unter der glatten Feshbach-Schur-Abbildung besitzt die folgenden Eigenschaften.*

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

(i) H ist auf \mathfrak{H} genau dann beschränkt invertibel, wenn $F_\chi(H, T)$ beschränkt invertibel auf $\text{Ran}(\chi)$ ist. In diesem Fall gelten

$$H^{-1} = Q_\chi(H, T) F_\chi(H, T)^{-1} Q_\chi(H, T)^\# + \bar{\chi} H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi}, \quad (\text{V.6})$$

$$F_\chi(H, T)^{-1} = \chi H^{-1} \chi + \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi}. \quad (\text{V.7})$$

(ii) $\text{Ker}[H]$ und $\text{Ker}[F_\chi(H, T)]$ sind isomorph und $\chi : \text{Ker}[H] \rightarrow \text{Ker}[F_\chi(H, T)]$ und $Q_\chi(H, T) : \text{Ker}[F_\chi(H, T)] \rightarrow \text{Ker}[H]$ sind zueinander inverse, beschränkte Isomorphismen.

(iii) Sind zusätzlich $\chi = \chi^*$, $H = H^*$ und $T = T^*$ selbstadjungiert und

$$M := (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \quad \text{und} \quad N := (\mathbb{1} + M^* M)^{-1/2}, \quad (\text{V.8})$$

so gelten

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle \psi | (H - i\varepsilon)^{-1} \psi \rangle = \quad (\text{V.9})$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \left\langle N Q_\chi(H, T)^* \psi \left| (N F_\chi(H, T) N - i\varepsilon)^{-1} N Q_\chi(H, T)^* \psi \right. \right\rangle$$

und

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle \psi | (N F_\chi(H, T) N - i\varepsilon)^{-1} \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle \chi N^{-1} \psi | (H - i\varepsilon)^{-1} \chi N^{-1} \psi \rangle, \quad (\text{V.10})$$

für jedes $\psi \in \mathcal{H}$.

Beweis. Für den Beweis verwenden wir die Abkürzungen $F := F_\chi(H, T)$, $Q := Q_\chi(H, T)$ und $Q^\# := Q^\#_\chi(H, T)$ wie in [?] und folgen weitgehend [?]. Wir beweisen zunächst die folgenden Identitäten auf \mathcal{D} :

$$\bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} H = \mathbb{1} - Q \chi, \quad \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi} F = \mathbb{1} - \chi Q, \quad (\text{V.11})$$

$$H Q = \chi F, \quad Q^\# H = F \chi. \quad (\text{V.12})$$

Der Beweis erfolgt jeweils durch Nachrechnen. Glg. (V.11) ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} H &= \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} T \bar{\chi} + \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W = \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} (T + W_{\bar{\chi}}) \bar{\chi} + \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi^2 \\ &= \bar{\chi}^2 + \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi^2 = \mathbb{1} - Q \chi, \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi} F &= \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi} (T + W_\chi - \chi W \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \bar{\chi}) \\ &= \bar{\chi}^2 + \chi \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi} W \chi - \chi \bar{\chi} T^{-1} W_{\bar{\chi}} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \bar{\chi} \\ &= \bar{\chi}^2 + \chi \bar{\chi} [T^{-1} - (H_{\bar{\chi}})^{-1} - T^{-1} W_{\bar{\chi}} (H_{\bar{\chi}})^{-1}] \bar{\chi} W \chi + \chi \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \\ &= \bar{\chi}^2 + \chi \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi = \mathbb{1} - \chi Q. \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

Auch der Beweis von (V.12) ist eine Rechnung,

$$HQ = H\chi - H\bar{\chi}(H\bar{\chi})^{-1}\bar{\chi}W\chi = \chi H\chi + \bar{\chi}^2 W\chi - (\bar{\chi}H\bar{\chi} + \chi^2 W\bar{\chi})(H\bar{\chi})^{-1}\bar{\chi}W\chi = \chi F. \quad (\text{V.15})$$

Die zweite Identität in (V.12) ergibt sich ähnlich.

zu (i): Es reicht zu zeigen, dass die beschränkte Invertibilität von F auf $\text{Ran}(\chi)$ Glg. (V.6) und die beschränkte Invertibilität von H auf \mathfrak{H} Glg. (V.7) implizieren.

Seien also F auf $\text{Ran}(\chi)$ invertibel und

$$R := QF^{-1}Q^\# + \bar{\chi}H\bar{\chi}^{-1}\bar{\chi}. \quad (\text{V.16})$$

Mit Hilfe von (V.11) und (V.12) erhalten wir

$$RH = QF^{-1}Q^\#H + \bar{\chi}(H\bar{\chi})^{-1}\bar{\chi}H = QF^{-1}F\chi + \mathbb{1} - Q\chi = \mathbb{1}, \quad (\text{V.17})$$

und mit einer ähnlichen Rechnung auch $HR = \mathbb{1}$. Also ist H beschränkt invertibel mit $R = H^{-1}$, wie in (V.6) behauptet.

Seien umgekehrt H beschränkt invertibel und

$$\tilde{R} := \chi H^{-1}\chi + \bar{\chi}T^{-1}\bar{\chi}. \quad (\text{V.18})$$

Abermals unter Verwendung von (V.11) und (V.12) folgt dann

$$\tilde{R}F = \chi H^{-1}\chi F + \bar{\chi}T^{-1}\bar{\chi}F = \chi H^{-1}HQ + \mathbb{1} - \chi Q = \mathbb{1}. \quad (\text{V.19})$$

Analog zeigt man, dass auch $\tilde{R}F = \mathbb{1}$. Also ist F auf \mathcal{H} (global) invertibel with Inverser $F^{-1} = \tilde{R}$. Bezeichnen wir mit P die Projektion auf $\text{Ran}(\chi)$, so beobachten wir, dass

$$F = PFP + P^\perp T P^\perp \quad (\text{V.20})$$

blockdiagonal bezüglich $\mathcal{H} = \text{Ran}(\chi) \oplus \text{Ran}(\chi)^\perp$ ist. Daher impliziert die globale Invertibilität von F auf \mathcal{H} auch die Invertibilität der Restriktion von F auf $\text{Ran}(\chi)$, was den Beweis von (i) vervollständigt.

zu (ii): Ist $\psi \in \text{Ker}(H)$, so folgt $F[\chi\psi] = Q^\#H\psi = 0$ nach (V.12), d.h. $\chi\psi \in \text{Ker}(F)$. Analog erhalten wir für $\varphi \in \text{Ker}(F)$ aus (V.12), dass $H[Q\varphi] = \chi F\varphi = 0$, d.h. $Q\varphi \in \text{Ker}(H)$. Somit sind

$$\chi : \text{Ker}(H) \rightarrow \text{Ker}(F) \quad \text{und} \quad Q : \text{Ker}(F) \rightarrow \text{Ker}(H). \quad (\text{V.21})$$

Außerdem folgt aus (V.11) und $\psi \in \text{Ker}(H)$ sowie $\varphi \in \text{Ker}(F)$, dass

$$Q\chi\psi = \psi - \bar{\chi}(H\bar{\chi})^{-1}\bar{\chi}H\psi = \psi, \quad (\text{V.22})$$

$$\chi Q\varphi = \varphi - \bar{\chi}T^{-1}\bar{\chi}F\varphi = \varphi, \quad (\text{V.23})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

was den Beweis von (ii) komplettiert,

$$Q \circ \chi = \mathbb{1}_{\text{Ker}(H)} \quad \text{und} \quad \chi \circ Q = \mathbb{1}_{\text{Ker}(F)}. \quad (\text{V.24})$$

zu (iii): Nach Voraussetzung ist $H_{\bar{\chi}} - z$ auf $\text{Ran}(\bar{\chi})$ für $z = 0$ beschränkt invertibel, d.h. $\overline{0} \in \rho(\bar{H}_{\bar{\chi}}|_{\text{Ran}(\bar{\chi})})$. Da die Resolventenmenge offen ist, enthält sie eine offene Kreisscheibe um 0 mit Radius $r > 0$ und so, dass die Norm der Resolvente auf dieser Kreisscheibe uniform beschränkt ist,

$$D(0, r) \subseteq \rho(H_{\bar{\chi}}|_{\text{Ran}(\bar{\chi})}) \quad \text{und} \quad \sup_{|z| < r} \|\bar{\chi}(H_{\bar{\chi}} - z)^{-1}\bar{\chi}\|_{\text{op}} \leq C < \infty. \quad (\text{V.25})$$

Es folgt, dass $(H - z, T - z)$ ein Feshbach-Schur-Paar zu χ für alle $z \in D(0, r)$. Wir kürzen $F_z := F_{\chi}(H - z, T - z)$ und $Q := Q_{\chi}(H, T)$ ab und zeigen für jedes $\psi \in \mathcal{H}$, dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle N \psi | (N F_0 N - i\varepsilon)^{-1} N \psi \rangle. \quad (\text{V.26})$$

Dazu berechnen wir die Differenz zwischen $F_{i\varepsilon}$ und $F_0 - i\varepsilon$,

$$\begin{aligned} F_{i\varepsilon} - F_0 + i\varepsilon &= -\chi W \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} \bar{\chi} W \chi + \chi W \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \\ &= -i\varepsilon \chi W \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \\ &= -i\varepsilon \chi W \bar{\chi} H_{\bar{\chi}}^{-2} \bar{\chi} W \chi + \varepsilon^2 \chi W \bar{\chi} (H_{\bar{\chi}})^{-1} (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} \bar{\chi} W \chi \\ &= -i\varepsilon M^* M + \varepsilon^2 M^* (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} M \\ &= -i\varepsilon M^* M + \varepsilon^2 M^* (H_{\bar{\chi}})^{-1} M + i\varepsilon^3 M^* (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} M. \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Unter Beachtung, dass $N^{-2} = \mathbb{1} + M^* M$, sehen wir, dass (V.27) äquivalent ist zu

$$F_{i\varepsilon} - F_0 + i\varepsilon N^{-2} = \varepsilon^2 M^* (H_{\bar{\chi}})^{-1} M + i\varepsilon^3 M^* (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} M, \quad (\text{V.28})$$

und wenn wir dies von links mit $F_{i\varepsilon}^{-1}$ und von rechts mit $(F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}$ multiplizieren, erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} F_{i\varepsilon}^{-1} - (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} &= -\varepsilon^2 F_{i\varepsilon}^{-1} M^* (H_{\bar{\chi}})^{-1} M (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} \\ &\quad + i\varepsilon^3 F_{i\varepsilon}^{-1} M^* (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} M (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

Nun sind $\|F_{i\varepsilon}^{-1}\|_{\text{op}} \leq C\varepsilon^{-1}$ und auch $\|(F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}\|_{\text{op}} = C\varepsilon^{-1}$, sodass

$$\|F_{i\varepsilon}^{-1} - (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}\|_{\text{op}} \leq C, \quad (\text{V.30})$$

$$\|i\varepsilon^3 F_{i\varepsilon}^{-1} M^* (H_{\bar{\chi}} - i\varepsilon)^{-1} (H_{\bar{\chi}})^{-1} M (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}\|_{\text{op}} = C\varepsilon. \quad (\text{V.31})$$

Aus Glg. (V.31) folgt, dass der zweite Term auf der rechten Seite in (V.29) im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ vernachlässigt werden kann, d.h. dass

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{Im} \langle \psi | \{F_{i\varepsilon}^{-1} - (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}\} \psi \rangle &= \\ &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \varepsilon^2 \text{Im} \langle \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} M^* (H_{\bar{\chi}})^{-1} M (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} \psi \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

Dank (V.30) und der Schranke $\|(F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ können wir $F_{i\varepsilon}^{-1}$ auf der rechten Seite in (V.32) durch $(F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1}$ ersetzen; genauer gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \left\langle \psi \left| \left\{ F_{i\varepsilon}^{-1} - (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} \right\} \psi \right\rangle \\ &= - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \varepsilon^2 \operatorname{Im} \left\langle \psi \left| (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} M^* (H_{\bar{\chi}})^{-1} M (F_0 - i\varepsilon N^{-2})^{-1} \psi \right\rangle \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \left\langle M N \frac{\varepsilon}{N F_0 N + i\varepsilon} N \psi \left| H_{\bar{\chi}}^{-1} M N \frac{\varepsilon}{N F_0 N - i\varepsilon} N \psi \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

Schließlich nutzen wir die Tatsache aus, dass $\varepsilon(NF_0N \pm i\varepsilon)^{-1}$ stark gegen $\mp i P_{\operatorname{Ker}(NF_0N)}$ konvergiert, wobei $P_{\operatorname{Ker}(NF_0N)}$ die Projektion auf den Kern von (NF_0N) notiert. Daher ist der Limes $\varepsilon \searrow 0$ des Matrixelements auf der rechten Seite von (V.33) reell, und wir erhalten (V.26), also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle N \psi | (N F_0 N - i\varepsilon)^{-1} N \psi \rangle. \quad (\text{V.34})$$

Zum Beweis von (V.10) kombinieren wir (V.26) [bzw. (V.34)] mit (V.7) und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \left\langle \psi \left| (N F_0 N - i\varepsilon)^{-1} \psi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle N^{-1} \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} N^{-1} \psi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle \chi N^{-1} \psi | (H - i\varepsilon)^{-1} \chi N^{-1} \psi \rangle + \operatorname{Im} \langle \bar{\chi} N^{-1} \psi | T^{-1} \bar{\chi} N^{-1} \psi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle \chi N^{-1} \psi | (H - i\varepsilon)^{-1} \chi N^{-1} \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

Der Beweis von (V.9) ist ähnlich. Wir verwenden abermals (V.26) [bzw. (V.34)] und (V.7) und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle \psi | (H - i\varepsilon)^{-1} \psi \rangle &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle Q^* \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} Q^* \psi \rangle + \operatorname{Im} \langle \bar{\chi} \psi | H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi} \psi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle Q^* \psi | F_{i\varepsilon}^{-1} Q^* \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{Im} \langle N Q^* \psi | (N F_0 N - i\varepsilon)^{-1} N Q^* \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

□

Die spezielle Wahl von χ als Projektion $P = P^2$ ergibt in Satz V.2 gerade die wohlbekannte *Feshbach-Projektionsmethode* der theoretischen Physik, die in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik unter einem jeweils anderen Namen bekannt ist – etwa als *Schur-Komplement*, *Grushin-Problem* oder *Lyapunov-Schmidt-Reduktion*– und die auch immer wieder „neu entdeckt“ wird. Wir formulieren diesen Spezialfall im folgenden Korollar.

Korollar V.3. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $(H, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein auf $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H}$ dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator auf \mathfrak{H} . Sei weiterhin $P = P^2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ eine beschränkte Projektionen auf \mathfrak{H} , die \mathcal{D} erhält, $P(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, und so, dass $\overline{P H P}$ auf $\operatorname{Ran}(\overline{P})$ beschränkt invertibel ist, wobei $\overline{P} := \mathbb{1} - P$. Dann existieren die **Feshbach-Schur-Abbildung** $(F_P(H), P(\mathcal{D})) \in \mathfrak{L}[\operatorname{Ran}(P)]$,*

$$F_P(H) := P H P - P H \overline{P} (\overline{P} H \overline{P})^{-1} \overline{P} H P, \quad (\text{V.37})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

sowie $(Q_P(H), \mathcal{D}), (Q_P(H)^\#, \mathfrak{H}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ mit

$$Q_P(H) := P - \overline{P}(\overline{P}H\overline{P})^{-1}\overline{P}HP \quad \text{und} \quad Q_P(H)^\# := P - PH\overline{P}(\overline{P}H\overline{P})^{-1}\overline{P}, \quad (\text{V.38})$$

und besitzen die folgende Eigenschaften:

(i) H ist auf \mathfrak{H} genau dann beschränkt invertibel, wenn $F_P(H)$ beschränkt invertibel auf $\text{Ran}(P)$ ist. In diesem Fall gelten

$$H^{-1} = Q_P(H) F_P(H)^{-1} Q_P(H)^\# + \overline{P}(\overline{P}H\overline{P})^{-1}\overline{P}, \quad (\text{V.39})$$

$$F_P(H)^{-1} = P H^{-1} P. \quad (\text{V.40})$$

(ii) $\text{Ker}[H]$ und $\text{Ker}[F_P(H)]$ sind isomorph und $P : \text{Ker}[H] \rightarrow \text{Ker}[F_P(H)]$ und $Q_P(H) : \text{Ker}[F_P(H)] \rightarrow \text{Ker}[H]$ sind zueinander inverse, beschränkte Isomorphismen.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^N$ mit unitärem Skalarprodukt und $A = A^* \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$ eine selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, und zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{C}^N$, d.h. $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \delta_{i,j}$. Dann sind

$$P_j = |\vec{x}_j\rangle\langle \vec{x}_j| \quad (\text{V.41})$$

die zugehörigen orthogonalen Projektionen, $P_j = P_j^* = P_j^2$.

- Wegen $\text{Ker}[A - \lambda_j \cdot \mathbb{1}] = \mathbb{C} \cdot \vec{x}_j$ ist $A - \lambda_j \cdot \mathbb{1}$ nicht invertibel, aber $P_j^\perp(A - \lambda_j)P_j^\perp$ ist auf $P_j^\perp \mathfrak{H} = (\mathbb{C} \cdot \vec{x}_j)^\perp$ invertibel, und wegen der Selbstadjungiertheit von A ist

$$(P_j^\perp(A - \lambda_j)P_j^\perp)^{-1}P_j^\perp = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{P_i}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (\text{V.42})$$

$$\|(P_j^\perp(A - \lambda_j)P_j^\perp)^{-1}P_j^\perp\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} \mid i \in \mathbb{Z}_1^N, i \neq j \right\}. \quad (\text{V.43})$$

- Ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 9, \quad (\text{V.44})$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{V.45})$$

$$P_1^\perp(A - 1)P_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad (P_1^\perp(A - 1)P_1^\perp)^{-1}P_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.46})$$

V.2. Störungstheorie isolierter Eigenwerte mit Hilfe der Feshbach-Schur-Abbildung

Wir diskutieren zunächst ein Beispiel. Seien $N = 3$ und

$$A = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C}), \quad (\text{V.47})$$

wie in (V.44), mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = 9$ sowie zugehörigen orthogonalen Eigenprojektionen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1^\perp = P_2 + P_3. \quad (\text{V.48})$$

Weiterhin seien $W = W^* \in \mathfrak{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ eine selbstadjungierte 3×3 -Störmatrix und $g > 0$ eine kleine Zahl. Dann ist auch

$$A_g = A_g^* = A + gW \in \mathfrak{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \quad (\text{V.49})$$

selbstadjungiert, und wir wissen bereits aus Kapitel IV, dass die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1(g)$, $\lambda_2(g)$, $\lambda_3(g)$ analytisch in g sind und $\lim_{g \rightarrow 0} \lambda_j(g) = \lambda_j$ genügen.

Zur genauen Untersuchung von (z.B.) $\lambda_1(g)$ definieren wir

$$P := P_1 \quad (\text{V.50})$$

und beobachten, dass $P^\perp(A - 1 - z)P^\perp$ für genügend kleine $|z|$ auf $P^\perp\mathbb{C}^3$ invertibel ist, und zwar

$$R_0^\perp(z) := (P^\perp(A - 1 - z)P^\perp)^{-1}P^\perp = \frac{P_2}{4 - z} + \frac{P_3}{8 - z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4-z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8-z} \end{pmatrix}, \quad (\text{V.51})$$

und also

$$\|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{1}{|4 - z|}, \frac{1}{|8 - z|} \right\} \leq \frac{1}{3}, \quad (\text{V.52})$$

falls $|z| \leq 1$. Aus der Isospektralität der Feshbach-Schur-Abbildung erhalten wir nun für alle $z \in D(0, 1)$, dass

$$\{1 + z \text{ ist ein Eigenwert von } A_g\} \Leftrightarrow \exists \vec{y} \neq \vec{0}: \mathcal{F}_P(A_g - 1 - z)\vec{y} = \vec{0}. \quad (\text{V.53})$$

Da $P\mathfrak{H} = \mathbb{C} \cdot \vec{e}_1$ ist, ist (V.53) gleichwertig mit $\mathcal{F}_P(A_g - 1 - z)\vec{e}_1 = \vec{0}$ und sogar

$$\langle \vec{e}_1 | \mathcal{F}_P(A_g - 1 - z)\vec{e}_1 \rangle = \vec{0}. \quad (\text{V.54})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

Wir berechnen $\mathcal{F}_P(A_g - 1 - z)$. Wegen

$$(A - 1 - z)P = P(A - 1 - z) = -zP \quad (\text{V.55})$$

und mit

$$R_g^\perp(z) := P^\perp(P^\perp(A - 1 - z + gW)P^\perp)^{-1}P^\perp \quad (\text{V.56})$$

ist

$$\mathcal{F}_P(A_g - 1 - z) = gPWP - zP - g^2PWP^\perp R_g^\perp(z)P^\perp WP. \quad (\text{V.57})$$

Nun ist nach (V.52)

$$\|g R_0^\perp(z) W P^\perp\|_{\text{op}} \leq \frac{|g|}{3} \|W\|_{\text{op}}, \quad (\text{V.58})$$

und für $|g| < 3/\|W\|_{\text{op}}$ erhalten wir aus einer Neumann-Reihenentwicklung, dass

$$\mathcal{F}_P(A_g - 1 - z) = -zP + gPW \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n (R_0^\perp(z)W)^n \right] P. \quad (\text{V.59})$$

Setzen wir dies in (V.54) ein, so erhalten wir eine implizite Gleichung für z ,

$$\begin{aligned} z &= g\langle \vec{e}_1 | W \vec{e}_1 \rangle - g^2 \langle \vec{e}_1 | W R_0^\perp(z) W \vec{e}_1 \rangle + g^3 \langle \vec{e}_1 | W R_0^\perp(z) W R_0^\perp(z) W \vec{e}_1 \rangle \\ &\quad - g^4 \langle \vec{e}_1 | W R_0^\perp(z) W R_0^\perp(z) W R_0^\perp(z) W \vec{e}_1 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

Schließlich schreiben wir noch $W_{i,j} := \langle \vec{e}_i | W \vec{e}_j \rangle$ und erhalten weiter

$$\begin{aligned} z &= gW_{1,1} - g^2 \left(\frac{W_{1,2}W_{2,1}}{4-z} + \frac{W_{1,3}W_{3,1}}{8-z} \right) \\ &\quad + g^3 \left(\frac{W_{1,2}W_{2,2}W_{2,1}}{(4-z)^2} + \frac{W_{1,2}W_{2,3}W_{3,1}}{(4-z)(8-z)} + \frac{W_{1,3}W_{3,2}W_{2,1}}{(8-z)(4-z)} + \frac{W_{1,3}W_{3,3}W_{3,1}}{(8-z)^2} \right) \\ &\quad - g^4 \left(\frac{W_{1,2}W_{2,2}W_{2,2}W_{2,1}}{(4-z)^3} + \dots \text{weitere 6 Terme} \dots + \frac{W_{1,3}W_{3,3}W_{3,3}W_{3,1}}{(8-z)^3} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Der gesuchte Eigenwert ist nun die Lösung $z_1(g)$ der obigen Gleichung (V.61) – vorausgesetzt, wir können ihre Existenz und Eindeutigkeit etablieren.

Satz V.4. *Seien $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein separabler komplexer Hilbertraum, $A = A^*, W = W^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zwei beschränkte selbstadjungierte Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein einfacher, isolierter Eigenwert von A mit zugehörigem normierten Eigenvektor $\vec{x} \in \mathfrak{H}$, d.h. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$,*

$$\delta := \text{dist}[\lambda, \sigma(A) \setminus \{\lambda\}] > 0, \quad (\text{V.62})$$

und mit $P := |\vec{x}\rangle\langle \vec{x}|$ gilt

$$\forall \vec{y} \in \mathfrak{H} : \quad \|(A - \lambda)P^\perp \vec{y}\| \geq \delta \|P^\perp \vec{y}\|. \quad (\text{V.63})$$

Sei $g_0 := \frac{1}{8}\delta\|W\|_{\text{op}}^{-1}$. Dann gelten folgende Aussagen:

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

(i) Für $g \in [-g_0, g_0]$ besitzt

$$A_g := A + gW \quad (\text{V.64})$$

in $I_\delta := (\lambda - \frac{\delta}{4}, \lambda + \frac{\delta}{4})$ einen Eigenwert $\lambda(g) \in I_\delta$, der einfach ist und eindeutig durch die implizite Gleichung

$$\lambda(g) = g \langle \vec{x} | W \vec{x} \rangle - g^2 \left\langle \vec{x} \left| W (P^\perp [A_g - \lambda(g)] P^\perp)^{-1} P^\perp W \vec{x} \right. \right\rangle \quad (\text{V.65})$$

bestimmt ist, wobei $P := |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|$ die orthogonale Projektion auf den zu λ gehörigen Eigenraum ist.

(ii) Der zu $\lambda(g)$ gehörige Eigenvektor $\vec{x}(g) \in \mathfrak{H} \setminus \{\vec{0}\}$ ist gegeben durch

$$\vec{x}(g) = \vec{x} - g (P^\perp [A_g - \lambda(g)] P^\perp)^{-1} P^\perp W \vec{x}. \quad (\text{V.66})$$

(iii) Der Eigenwert $\lambda(g)$ und der Eigenvektor $\vec{x}(g)$ besitzen jeweils eine auf $(-|g_0|, |g_0|)$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\lambda(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g^n, \quad (\text{V.67})$$

$$\vec{x}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{y}_n g^n, \quad (\text{V.68})$$

wobei

$$\alpha_0 = \lambda, \quad \alpha_1 = \langle \vec{x} | W \vec{x} \rangle \quad \text{und} \quad \alpha_2 = - \left\langle \vec{x} \left| W \left(\frac{P^\perp}{A - \lambda} \right) W \vec{x} \right. \right\rangle, \quad (\text{V.69})$$

sowie

$$\vec{y}_0 = \vec{x}, \quad \text{und} \quad \vec{y}_1 = - \left(\frac{P^\perp}{A - \lambda} \right) W \vec{x}. \quad (\text{V.70})$$

In (V.69) und (V.70) und auch im Weiteren verwenden wir für kommutierende Operatoren $AB = BA$ die Notation $AB^{-1} = B^{-1}A =: \frac{A}{B}$.

Beweis. Zur Anwendung des Korollars V.3 beobachten wir, dass gemäß (V.62) für alle $z \in D(0, \delta/2)$ auch $(\lambda + z) \notin \sigma(A) \setminus \{\lambda\}$ und wegen der Selbstadjungiertheit von A weiterhin

$$\left\| \frac{P^\perp}{A - \lambda - z} \right\|_{\text{op}} \leq \left(\text{dist}[\lambda + z, \sigma(A) \setminus \{\lambda\}] \right)^{-1} \leq \frac{1}{\delta - |z|} \leq \frac{2}{\delta} \quad (\text{V.71})$$

gilt. Für $g \in [-g_0, g_0]$ ist somit

$$\|g R_0^\perp(z) W\|_{\text{op}} \leq \frac{2|g| \|W\|_{\text{op}}}{\delta} \leq \frac{1}{4}, \quad (\text{V.72})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

wobei

$$R_0^\perp(z) = \frac{P^\perp}{A - \lambda - z}. \quad (\text{V.73})$$

Somit ist die zugehörige Neumann-Reihe konvergent, und wir erhalten

$$(\mathbb{1} + gR_0^\perp(z)W)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n (R_0^\perp(z)W)^n. \quad (\text{V.74})$$

Daher lässt sich auch die Inverse

$$R_g^\perp(z) := (P^\perp[A_g - \lambda - z]P^\perp)^{-1}P^\perp \quad (\text{V.75})$$

der Restriktion von $A_g - \lambda - z$ auf $P^\perp\mathfrak{H}$ konstruieren, nämlich

$$\begin{aligned} R_g^\perp(z) &= [(A - \lambda - z)P^\perp + gP^\perp W P^\perp]^{-1}P^\perp = [\mathbb{1} + gR_0^\perp(z)W P^\perp]^{-1}R_0^\perp(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n (R_0^\perp(z)W)^n R_0^\perp(z). \end{aligned} \quad (\text{V.76})$$

Insbesondere erhalten wir die Normabschätzungen

$$\begin{aligned} \|R_g^\perp(z)\|_{\text{op}} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |g|^n \|W\|_{\text{op}}^n \|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}^{n+1} \\ &= \frac{\|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}}{1 - |g| \|W\|_{\text{op}} \|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}} \leq \frac{\frac{2}{\delta}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3\delta} \end{aligned} \quad (\text{V.77})$$

und

$$\begin{aligned} \|R_g^\perp(z) - R_0^\perp(z)\|_{\text{op}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |g|^n \|W\|_{\text{op}}^n \|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}^{n+1} \\ &= \frac{|g| \|W\|_{\text{op}} \|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}^2}{1 - |g| \|W\|_{\text{op}} \|R_0^\perp(z)\|_{\text{op}}} \leq \frac{16 \|W\|_{\text{op}}}{\delta^2} |g|, \end{aligned} \quad (\text{V.78})$$

wobei wir (V.71) und (V.72) verwenden. Somit existiert das Bild $\mathcal{F}_P(A_g - \lambda - z)$ der Feshbach-Schur-Abbildung, angewandt auf $A_g - \lambda - z$, für alle $z \in D(0, \delta/2)$, und gemäß Korollar V.3 gilt

$$\{\lambda + z \in \sigma(A_g)\} \Leftrightarrow \{0 \in \sigma(A_g - \lambda - z)\} \Leftrightarrow \{0 \in \sigma[\mathcal{F}_P(A_g - \lambda - z)]\}, \quad (\text{V.79})$$

und in diesem Fall ist

$$\dim \text{Ker}[A_g - \lambda - z] = \dim \text{Ker}[\mathcal{F}_P(A_g - \lambda - z)]. \quad (\text{V.80})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

Da $P = |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|$ eine Projektion vom Rang eins ist, ist (V.79) für alle $z \in D(0, \delta/2)$ gleichwertig mit

$$\begin{aligned} \{\lambda + z \text{ ist ein Eigenwert von } A_g\} &\Leftrightarrow \left\{0 = \langle\vec{x} | \mathcal{F}_P(A_g - \lambda - z)\vec{x}\rangle\right\} \\ &\Leftrightarrow \{z = h_g(z)\}, \end{aligned} \quad (\text{V.81})$$

wobei $h_g : D(0, \delta/2) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$h_g(z) := g\langle\vec{x} | W\vec{x}\rangle - g^2\langle\vec{x} | WR_g^\perp(z)W\vec{x}\rangle. \quad (\text{V.82})$$

Beachte, dass

$$|h_g(z)| \leq |g| \|W\|_{\text{op}} + g^2 \|W\|_{\text{op}}^2 \|R_g^\perp(z)\|_{\text{op}} \leq \frac{3}{2} |g| \|W\|_{\text{op}} \leq \frac{3\delta}{2 \cdot 8} < \frac{\delta}{2}, \quad (\text{V.83})$$

also ist

$$h_g(z) : \overline{D(0, \frac{3\delta}{16})} \rightarrow \overline{D(0, \frac{3\delta}{16})}, \quad (\text{V.84})$$

wobei $\overline{D(z_0, r)} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| \leq r\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ notiert.

Aus der ersten Resolventengleichung erhalten wir nun für alle $w, z \in \overline{D(0, \frac{3\delta}{16})}$, dass

$$\begin{aligned} |h_g(w) - h_g(z)| &= g^2 |\langle\vec{x} | W[R_g^\perp(w) - R_g^\perp(z)]W\vec{x}\rangle| \\ &= g^2 |w - z| |\langle\vec{x} | W R_g^\perp(w) R_g^\perp(z) W\vec{x}\rangle| \\ &\leq g^2 |w - z| \|W\|_{\text{op}}^2 \|R_g^\perp(w)\|_{\text{op}} \|R_g^\perp(z)\|_{\text{op}} \\ &\leq \left(\frac{8|g| \|W\|_{\text{op}}}{3\delta}\right)^2 |w - z| \leq \frac{1}{9} |w - z|, \end{aligned} \quad (\text{V.85})$$

wobei wir (V.77) verwenden. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts $z_g \in \overline{D(0, \frac{3\delta}{16})}$ von h_g , also einer Lösung von $z = h_g(z)$.

Mit Blick auf (V.81) folgern wir, dass A_g in $\overline{D(\lambda, \frac{3\delta}{16})}$ genau einen Eigenwert $\lambda + z_g$ besitzt, der wegen

$$\dim \text{Ker}[A_g - \lambda - z_g] = \dim \text{Ker}[\mathcal{F}_P(A_g - \lambda - z_g)] = 1 \quad (\text{V.86})$$

einfach (d.h. nichtentartet) ist. Die Potenzreihenentwicklung von z_g gewinnen wir konkret durch Iteration von h_g . Dazu setzen wir $z_g^{(0)} := 0$ und $z_g^{(n)} := h_g[z_g^{(n-1)}]$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Korollar V.3 impliziert außerdem, dass $\text{Ker}[A_g - \lambda - z_g] = \mathbb{C} \cdot \vec{x}_g$ mit

$$\vec{x}_g = \vec{x} - g R_g^\perp(z_g) W\vec{x}. \quad (\text{V.87})$$

Um dies näher zu untersuchen, schätzen wir zunächst $|z_g|$ ab; es ist

$$|z_g| \leq |z_1| + |z_g - z_1| = |h_g(0)| + |h_g(z_g) - h_g(0)| \leq |h_g(0)| + \frac{1}{9}|z_g|, \quad (\text{V.88})$$

V. Die Feshbach-Schur-Abbildung

also ist mit (V.83)

$$|z_g| \leq \frac{9}{8} |h_g(0)| \leq \frac{81}{32} |g| \|W\|_{\text{op}}. \quad (\text{V.89})$$

Aus Abschätzung (V.78), der ersten Resolventengleichung, (V.88) und (V.77) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \|R_g^\perp(z_g) - R_0^\perp(0)\|_{\text{op}} &\leq \|R_g^\perp(z_g) - R_0^\perp(z_g)\|_{\text{op}} + \|R_0^\perp(z_g) - R_0^\perp(0)\|_{\text{op}} \\ &\leq \frac{16 \|W\|_{\text{op}}}{\delta^2} |g| + |z_g| \|R_0^\perp(z_g)\|_{\text{op}} \|R_0^\perp(0)\|_{\text{op}} \\ &\leq \frac{16 \|W\|_{\text{op}}}{\delta^2} |g| + \frac{81 \cdot 8^2 \cdot \|W\|_{\text{op}}}{32 \cdot 3^2 \cdot \delta^2} |g| \leq \frac{34 \|W\|_{\text{op}}}{\delta^2} |g|. \end{aligned} \quad (\text{V.90})$$

Setzen wir diese Abschätzung in (V.87) ein, so folgt

$$\|\vec{x}_g - [\vec{x} - gR_0^\perp(0)W\vec{x}]\| \leq |g| \|R_g^\perp(z_g) - R_0^\perp(0)\|_{\text{op}} \|W\|_{\text{op}} \leq \frac{34 \|W\|_{\text{op}}^2}{\delta^2} |g|^2 \leq 4 C_{W,\delta}^2 |g|^2. \quad (\text{V.91})$$

□