

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

IV.1. Operatorwertige holomorphe Funktionen

Sie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen. Die klassische Funktionentheorie hat die Untersuchung holomorpher Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ zum Gegenstand, also auf Ω komplex differenzierbarer Funktionen mit Werten in \mathbb{C} . Eine einfache, aber wichtige Beobachtung in der Funktionalanalysis ist die Übertragbarkeit eines großen Teils der Funktionentheorie bis einschließlich der Cauchyschen Integralformel auf Funktionen $f : \Omega \rightarrow X$ mit Werten in einem komplexen Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$. Besonders einfach wird die Situation, falls $X = \mathcal{B}(Y)$ der Raum der beschränkten linearen Operatoren auf einem komplexen Banach-Raum ist, denn die dann maßgebliche Operatornorm ist submultiplikativ, $\|AB\|_{\mathcal{B}(Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(Y)} \cdot \|B\|_{\mathcal{B}(Y)}$, und die Übertragung der Beweise vom \mathbb{C} -wertigen Fall der klassischen Funktionentheorie auf den $\mathcal{B}(Y)$ -wertigen Fall erfolgt fast ausnahmslos durch Ersetzung von Beträgen komplexer Zahlen durch die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(Y)}$.

Wir werden uns hier auf den letzteren Fall beschränken, und zwar mit $Y = \mathfrak{H}$, wobei \mathfrak{H} wieder ein separabler komplexer Hilbert-Raum ist. Wir geben keine Beweise der zugehörigen Sätze. Für den folgenden Satz erinnern wir zuvor an den Begriff des rektifizierbaren Wegs: Sind $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, so heißt ein Weg $\gamma \in C([a, b]; \Omega)$ *rektifizierbar*, falls

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \mid N \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_N := b \right\} < \infty. \quad (\text{IV.1})$$

In diesem Fall nennt man $L(\gamma)$ die *Länge* des Weges γ .

Satz IV.1. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{C})$ ein rektifizierbarer Weg in Ω und $f \in C(\Omega; \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$ eine stetige Funktion auf Ω .*

(i) *Dann existiert das **Integral***

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2^n - 1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)] f[\gamma(t_k)] \right\} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \quad (\text{IV.2})$$

von f entlang des Weges γ als normkonvergente Reihe, wobei $t_k := a + (b - a)2^{-n}k$.

(ii) *Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ so, dass*

$$\left\| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=0}^{N-1} [\gamma(s_{k+1}) - \gamma(s_k)] f[\gamma(s_k)] \right\|_{\text{op}} \leq \varepsilon, \quad (\text{IV.3})$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $a =: s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{N-1} < s_N := b$, die $s_{j+1} \leq s_j + \delta$, für $j \in \mathbb{Z}_0^{N-1}$ erfüllen.

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

(iii) Ist $\eta \sim \gamma$ ein zu γ äquivalenter Weg (d.h. ist η eine Umparametrisierung von γ), so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz. \quad (\text{IV.4})$$

(iv) Ist $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$ zusätzlich stetig differenzierbar, so ist $(f \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \in C([a, b]; \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f[\gamma(t)] \dot{\gamma}(t) dt. \quad (\text{IV.5})$$

(v) Für alle $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ ist

$$\left\langle \varphi \left| \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) \psi \right. \right\rangle = \int_{\gamma} \langle \varphi | f(z) \psi \rangle dz. \quad (\text{IV.6})$$

Definition IV.2. Seien \mathfrak{H} ein (separabler komplexer) Hilbert-Raum, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer und $f : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ eine Abbildung.

(i) f heißt **analytisch auf Ω**

$:\Leftrightarrow$ f ist lokal in Potenzreihen entwickelbar

$:\Leftrightarrow \forall z_0 \in \Omega \exists (a_k)_{k=0}^{\infty} \in [\mathcal{B}(\mathfrak{H})]^{\mathbb{N}_0}, R^{-1} := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|a_k\|_{\text{op}}} < \infty \forall z \in D(z_0, R) :$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (\text{IV.7})$$

(ii) f heißt **holomorph in Ω**

$:\Leftrightarrow \forall z_0 \in \Omega : f$ ist komplex differenzierbar in z_0 . (IV.8)

$:\Leftrightarrow \forall z_0 \in \Omega \exists f'(z_0) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) : \lim_{z \rightarrow z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\|_{\text{op}} = 0,$

und in diesem Fall heißt $f' : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ **Ableitung von f auf Ω** .

Mit diesem Holomorphiebegriff gilt der Cauchysche Integralsatz und auch die Cauchysche Integralformel sowie deren Äquivalenz zu Holomorphie und Analytizität.

Satz IV.3 (Cauchysche Integralsatz). Sind \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer, offen und einfach zusammenhängend, $f : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ holomorph in Ω , $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma \in C([a, b]; \Omega)$ ein geschlossener, rektifizierbarer Weg in Ω , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (\text{IV.9})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

Satz IV.4. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $\Omega \subset \mathbb{C}$ nichtleer, offen und einfach zusammenhängend und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in Ω . Dann sind folgende Aussagen gleichwertig, (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii):

- (i) f ist analytisch auf Ω ;
- (ii) f ist holomorph in Ω ;
- (iii) f erfüllt die **Cauchysche Integralformel**, d.h. für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ und jeden rektifizierbaren, geschlossenen, doppelpunktsfreien Weg $\gamma \in C([a, b]; \Omega)$ in Ω , der z_0 nicht berührt und z_0 in mathematisch positiver Richtung umläuft, gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (\text{IV.10})$$

Wir kommen nun zum für uns wichtigsten Beispiel für die holomorphe Funktion f , nämlich $f(z) = (A - z)^{-1}$.

Lemma IV.5. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf \mathfrak{H} . Dann ist die Resolventenmenge $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ von A offen, und $\rho(A) \ni z \mapsto (A - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist analytisch auf $\rho(A)$.

Beweis. Die Behauptung ist trivial richtig, falls $\rho(A) = \emptyset$ leer ist. Ist $z_0 \in \rho(A)$, so ist $A - z_0$ invertibel mit beschränkter Inverser $\|(A - z_0)^{-1}\|_{\text{op}} =: m^{-1} < \infty$. Die Neumann-Reihenentwicklung

$$(A - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - z)^k, \quad a_k := (A - z_0)^{-k-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad \|a_k\|_{\text{op}} \leq m^{-k-1}, \quad (\text{IV.11})$$

zeigt, dass diese Reihe für $z \in D(z_0, m)$ normkonvergent ist. Somit ist auch $D(z_0, m) \subseteq \rho(A)$, und $\rho(A)$ ist offen. Darüber hinaus folgt aus (IV.11) die behauptete Analytizität. \square

IV.2. Spektralprojektionen aus Dunford-Cauchy-Integralen

Die im vorigen Abschnitt skizzierte Theorie der operatorwertigen komplexen Analysis hat vielfältige Anwendungen, da sich mit ihr ein Funktionalkalkül $A \mapsto F(A)$ entwickeln lässt, der über die einsetzbaren Operatoren A nur sehr schwache Annahmen fordert.

Wir vertiefen dies hier nicht in allgemeiner Form, sondern konzentrieren uns auf Projektionen, wie in [?]. Dabei wollen wir für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $\partial D(z_0, r)$ den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r \cdot e^{it} + z_0$, entlang des Randes der Kreisscheibe $D(z_0, r)$ bezeichnen, der z_0 in mathematisch positiver Richtung umläuft.

Satz IV.6. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf \mathfrak{H} und $\lambda \in \sigma(A)$ ein isolierter Spektralpunkt, d.h. $\varepsilon := \text{dist}[\lambda, \sigma(A) \setminus \{\lambda\}] > 0$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Für jedes $0 < r < \varepsilon$ existiert

$$P := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{A - z} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad (\text{IV.12})$$

ist beschränkt und unabhängig von r .

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

- (ii) P ist eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$. Ist (A, \mathcal{D}_A) darüber hinaus selbstadjungiert, so ist P orthogonal, d.h. $P = P^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist auch selbstadjungiert.
- (iii) Der Kern $\text{Ker}(P) \subseteq \mathfrak{H}$ und das Bild $\text{Ran}(P) \subseteq \mathfrak{H}$ von P sind abgeschlossene komplementäre Unterräume, d.h. es gilt

$$\mathfrak{H} = \text{Ran}(P) + \text{Ker}(P) \quad \text{und} \quad \text{Ran}(P) \cap \text{Ker}(P) = \{0\}, \quad (\text{IV.13})$$

Ist (A, \mathcal{D}_A) darüber hinaus selbstadjungiert, so sind Kern und Bild von P zueinander orthogonal, $\text{Ker}(P) \perp \text{Ran}(P)$.

- (iv) Das Bild $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}_A$ liegt im Definitionsbereich von A und ist ein invarianter Unterraum, $A[\text{Ran}(P)] \subseteq \text{Ran}(P)$.
- (v) Es sind $\text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A$ dicht in $\text{Ker}(P)$ und $A[\text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A] \subseteq \text{Ker}(P)$.
- (vi) Sind $\dim \text{Ran}(P) = n < \infty$, so ist $(A - \lambda)^n \psi = 0$ für jedes $\psi \in \text{Ran}(P)$.
- (vii) Für jedes $0 < r < \varepsilon$ und $w \in D(\lambda, r/2)$ ist $A - w : \text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A \rightarrow \text{Ker}(P)$ beschränkt invertibel mit Resolvente $\bar{R}(w) : \text{Ker}(P) \rightarrow \text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A$,

$$\bar{R}(w) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(\lambda, r)} \frac{1}{w - z} \frac{dz}{A - z} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad (\text{IV.14})$$

die der Normabschätzung $\|\bar{R}(w)\|_{\text{op}} \leq 2 \max_{|z-\lambda|=r} \|(A - z)^{-1}\|_{\text{op}}$ genügt.

Beweis.

zu (i): Nach Voraussetzung ist die punktierte Kreisscheibe $\dot{D}(\lambda, \varepsilon) := D(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\} \subseteq \rho(A)$ Teil der Resolventenmenge von A und $z \mapsto (A - z)^{-1}$ analytisch auf $\dot{D}(\lambda, \varepsilon)$ nach Lemma IV.5. Damit sind die Existenz des Integrals (IV.12) und seine Unabhängigkeit von $r \in (0, \varepsilon)$ Konsequenzen aus Satz IV.1 und dem Cauchyschen Integralsatz, Satz IV.3. Die Beschränktheit von P erhalten wir aus der Dreieckungleichung und der Tatsache, dass $z \mapsto \|(A - z)^{-1}\|_{\text{op}}$ – als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\partial D(\lambda, r)$ – beschränkt ist, nämlich

$$\|P\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| (A - \lambda - re^{it})^{-1} \right\|_{\text{op}} r dt \leq r M, \quad (\text{IV.15})$$

mit

$$M := \max_{|\zeta|=r} \left\| (A - \lambda - \zeta)^{-1} \right\|_{\text{op}} < \infty. \quad (\text{IV.16})$$

zu (ii): Wir wählen $0 < r < R < \varepsilon$ und beobachten, dass gemäß der 1. Resolventengleichung

$$\frac{1}{A - z} - \frac{1}{A - w} = \frac{1}{A - z} (z - w) \frac{1}{A - w} \quad (\text{IV.17})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

für $z \in \partial D(\lambda, R)$ und $w \in \partial D(\lambda, r)$ gilt. Somit ist

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \int_{z \in \partial D(\lambda, R)} \int_{w \in \partial D(\lambda, r)} \frac{1}{A-z} \frac{1}{A-w} dz dw \\
 &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial D(\lambda, R)} \int_{\partial D(\lambda, r)} \left(\frac{1}{A-z} - \frac{1}{A-w} \right) \frac{dz dw}{z-w} \\
 &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, R)} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{w \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dw}{z-w} \right\} \frac{dz}{A-z} \\
 &\quad - \frac{-1}{2\pi i} \int_{w \in \partial D(\lambda, r)} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, R)} \frac{dz}{z-w} \right\} \frac{dw}{A-w}.
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Nun liegt jeder Punkt $z \in \partial D(\lambda, R)$ wegen $R > r$ außerhalb der Kontur $\partial D(\lambda, r)$, und deshalb ist

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{w \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dw}{z-w} = 0. \tag{IV.19}$$

Umgekehrt ist jeder Punkt $w \in \partial D(\lambda, r)$ wegen $r < R$ innerhalb der Kontur $\partial D(\lambda, R)$, und deshalb ist

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, R)} \frac{dz}{z-w} = -1. \tag{IV.20}$$

Setzen wir (IV.19) und (IV.20) in (IV.18) ein, so folgt

$$P^2 = \frac{-1}{2\pi i} \int_{w \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dw}{A-w} = P. \tag{IV.21}$$

Für selbstadjungiertes A sind dann $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$P^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{A-\bar{z}} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{A-z} = P, \tag{IV.22}$$

da mit $z = \lambda + e^{it}$ die konjugierte Variable $\bar{z} = \lambda + e^{-it}$ dieselbe Kontur $\partial D(\lambda, r)$ in umgekehrter Richtung durchläuft.

zu (iii): Zunächst beobachten wir, dass mit P auch $\mathbb{1} - P$ eine Projektion ist, da $(\mathbb{1} - P)^2 = \mathbb{1} - 2P + P^2 = \mathbb{1} - P$ ist. Da P nach (i) und somit auch $\mathbb{1} - P$ beschränkt sind, sind $\text{Ker}(P) \subseteq \mathfrak{H}$ und $\text{Ran}(P) = \text{Ker}(\mathbb{1} - P) \subseteq \mathfrak{H}$ abgeschlossene Unterräume.

Ist weiterhin $\varphi \in \text{Ran}(P)$, so gibt es ein $\eta \in \mathfrak{H}$ mit $\varphi = P\eta$ und dann gilt $(\mathbb{1} - P)\varphi = P\eta - P^2\eta = P\eta - P\eta = 0$, also ist $\varphi \in \text{Ker}(\mathbb{1} - P)$. Ist umgekehrt $\hat{\varphi} \in \text{Ker}(\mathbb{1} - P)$, so ist $\varphi = P\hat{\varphi} \in \text{Ran}(P)$. Wiederholen wir dieses Argument mit P durch $\mathbb{1} - P$ ersetzt, so erhalten wir

$$\text{Ran}(P) = \text{Ker}(\mathbb{1} - P) \quad \text{und} \quad \text{Ran}(\mathbb{1} - P) = \text{Ker}(P). \tag{IV.23}$$

Insbesondere können wir jedes $\psi \in \mathfrak{H}$ schreiben als $\psi = P\psi + (\mathbb{1} - P)\psi$ und beobachten, dass $P\psi \in \text{Ran}(P)$ und $(\mathbb{1} - P)\psi \in \text{Ran}(\mathbb{1} - P) = \text{Ker}(P)$, nach (IV.23). Also ist $\mathfrak{H} = \text{Ran}(P) + \text{Ker}(P)$.

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

Aus $\psi = P\eta \in \text{Ran}(P)$ folgt $P\psi = P^2\eta = P\eta = \psi$. Ist außerdem $\psi \in \text{Ker}(P)$, so folgt damit $\psi = P\psi = 0$, also $\text{Ran}(P) \cap \text{Ker}(P) = \{0\}$.

zu (iv): Wir erinnern zuerst an die Definition (IV.2) des Wegintegrals, dergemäß $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \{P_n\}$ in Norm ist, wobei

$$P_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{r(\tau_n^{k+1} - \tau_n^k)}{A - \lambda - r\tau_n^k} \quad (\text{IV.24})$$

mit $\tau_n := \exp[2\pi i \cdot 2^{-n}]$ sind.

Für jedes $k \in \mathbb{Z}_0^{2^n-1}$ ist $\lambda + r\tau_n^k \in \rho(A)$ und somit $(A - \lambda - r\tau_n^k)^{-1}[\mathfrak{H}] \subseteq \mathcal{D}_A$. Da $\mathcal{D}_A \subseteq \mathfrak{H}$ ein Teilraum ist, folgt damit $\text{Ran}(P_n) \subseteq \mathcal{D}_A$. Außerdem definiert AP_n einen beschränkten Operator auf \mathfrak{H} mit

$$\|AP_n\|_{\text{op}} \leq r|\tau_n - 1| 2^n \max_{|z|=r} \|A(A - \lambda - z)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 2\pi r [1 + (|\lambda| + r)M] < \infty, \quad (\text{IV.25})$$

da $|\tau_n - 1| = 2|\sin(2\pi \cdot 2^{-n})| \leq 2\pi \cdot 2^{-n}$ und

$$\|A(A - \lambda - z)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 1 + (|\lambda| + r)\|(A - \lambda - z)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 1 + (|\lambda| + r)M \quad (\text{IV.26})$$

für $|z| = r$ gelten.

Ist nun $1 \leq m < n$, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{Z}_0^{2^n-1}$ eindeutige $\ell \in \mathbb{Z}_0^{2^m-1}$ und $j \in \mathbb{Z}_0^{2^{n-m}-1}$ so, dass $k = \ell \cdot 2^{n-m} + j$. Außerdem sind dann $\tau_m = \tau_n^{2^{n-m}}$ und

$$\tau_n^k = \tau_n^{\ell \cdot 2^{n-m}} \tau_n^j = \tau_m^\ell \tau_n^j. \quad (\text{IV.27})$$

Eingesetzt in (IV.24) ergibt dies

$$P_n = \sum_{\ell=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^{n-m}-1} \frac{r\tau_m^\ell \tau_n^j (\tau_n - 1)}{A - \lambda - r\tau_m^\ell \tau_n^j}. \quad (\text{IV.28})$$

Wir beobachten weiter, dass

$$\tau_m^{\ell+1} - \tau_m^\ell = \tau_m^\ell (\tau_n^{2^{n-m}} - 1) = \sum_{j=0}^{2^{n-m}-1} \tau_m^\ell (\tau_n^{j+1} - \tau_n^j), \quad (\text{IV.29})$$

woraus wir

$$P_m = \sum_{\ell=0}^{2^m-1} \frac{r(\tau_m^{\ell+1} - \tau_m^\ell)}{A - \lambda - r\tau_m^\ell} = \sum_{\ell=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^{n-m}-1} \frac{r\tau_m^\ell \tau_n^j (\tau_n - 1)}{A - \lambda - r\tau_m^\ell} \quad (\text{IV.30})$$

erhalten, was zusammen mit (IV.28)

$$\begin{aligned} P_n - P_m &= \sum_{\ell=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^{n-m}-1} r\tau_m^\ell \tau_n^j (\tau_n - 1) \left\{ (A - \lambda - r\tau_m^\ell \tau_n^j)^{-1} - (A - \lambda - r\tau_m^\ell)^{-1} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^{n-m}-1} \frac{-r^2 \tau_m^{2\ell} \tau_n^{2j} (\tau_n - 1) (\tau_n^j - 1)}{(A - \lambda - r\tau_m^\ell \tau_n^j) (A - \lambda - r\tau_m^\ell)} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

ergibt. Aus (IV.31) folgen mit (IV.16), (IV.26) und $|\tau_n^p - 1| = 2|\sin(2\pi p \cdot 2^{-n-1})| \leq 2\pi p 2^{-n}$, für $p = 1$ und $p = j \leq 2^{n-m}$ die Normabschätzungen

$$\|P_n - P_m\|_{\text{op}} \leq r^2 M^2 |\tau_n - 1| |\tau_n^j - 1| 2^m 2^{n-m} \leq (2\pi r)^2 M^2 2^{-m}, \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{aligned} \|AP_n - AP_m\|_{\text{op}} &\leq r^2 M [1 + (|\lambda| + r) M] |\tau_n - 1| |\tau_n^j - 1| 2^m 2^{n-m} \\ &\leq (2\pi r)^2 M [1 + (|\lambda| + r) M] 2^{-m}. \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Damit sind $(P_n)_{n=1}^\infty$ als auch $(AP_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy-Folgen in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, und in der Tat wussten wir dies für $(P_n)_{n=1}^\infty$ schon, da $P_n \rightarrow P$, für $n \rightarrow \infty$.

Ist nun $\psi = P\psi \in \text{Ran}(P)$, so setzen wir $\psi_n := P_n\psi \in \mathcal{D}_A$ und beobachten, dass $\|\psi_n - \psi\| = \|(P_n - P)\psi\| \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$. Außerdem ist auch $(A\psi_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{H}^{\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, weil $\|A\psi_n - A\psi_m\| = \|(AP_n - AP_m)\psi\| \leq \|AP_n - AP_m\|_{\text{op}} \|\psi\|$. Also ist auch $(A\psi_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{H}^{\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \{A\psi_n\} \in \mathfrak{H}$. Da (A, \mathcal{D}_A) abgeschlossen ist, folgt nun $\psi \in \mathcal{D}_A$ und $A\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \{A\psi_n\}$. Schließlich ist

$$A\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \{AP_n\psi\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{P_n A\psi\} = PA\psi \in \text{Ran}(P). \quad (\text{IV.34})$$

M.a.W. lässt sich $(PA, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zu einem beschränkten Operator $\widetilde{PA} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ fortsetzen, und es gilt $\widetilde{PA} = AP$. (Die Faktoren P und A können in \widetilde{PA} nicht mehr getrennt werden).

zu (v): Sei $\psi \in \text{Ker}(P)$. Da $\mathcal{D}_A \subseteq \mathfrak{H}$ dicht liegt, gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_A$ so, dass $\|\psi - \tilde{\varphi}\| \leq \delta$. Wir setzen $\varphi := (\mathbb{1} - P)\tilde{\varphi} \in \text{Ran}(\mathbb{1} - P) = \text{Ker}(P)$. Wegen $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}_A$ ist mit $\tilde{\varphi}$ auch $\varphi = \tilde{\varphi} - P\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_A$, also ist $\varphi \in \text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A$. Da

$$\|\psi - \varphi\| = \|(\mathbb{1} - P)\psi - (\mathbb{1} - P)\tilde{\varphi}\| \leq \|\mathbb{1} - P\|_{\text{op}} \|\psi - \tilde{\varphi}\| \leq (1 + rM) \delta \quad (\text{IV.35})$$

im Limes $\delta \rightarrow 0$ beliebig klein wird, ist $\text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A$ in $\text{Ker}(P)$ dicht.

Da $AP = PA$ auf $\text{Ran}(P)$ gilt, ist $P[A\varphi] = A[P\varphi] = 0$, für jedes $\varphi \in \text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A$, und es folgt

$$A[\text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}_A] \subseteq \text{Ker}(P). \quad (\text{IV.36})$$

zu (vi): Seien $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \text{Ran}(P)$ eine Basis. Da $A[\text{Ran}(P)] \subseteq \text{Ran}(P)$ diesen n -dimensionalen Teilraum invariant lässt, ist $A = PAP$ auf $\text{Ran}(P)$. daher kann die Wirkung von $A - \lambda$ auf $\text{Ran}(P)$ durch die Matrix $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ dargestellt werden. Sei nun $\psi \in \mathcal{D}_A$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$. Dann ist

$$P\psi = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{\mu - z} \psi = 0. \quad (\text{IV.37})$$

Somit ist λ der einzige Eigenwert von A auf $\text{Ran}(P)$. Die Jordansche Normalform von $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ist also von der Form $\lambda \cdot \mathbb{1}_{n \times n} + D$, wobei alle nichtverschwindenden Matrixelemente von D oberhalb der Diagonalen liegen und D somit eine nilpotente Matrix mit $D^n = 0$ ist.

zu (vii): Zu $w \in \partial D(\lambda, r/2)$ definieren wir $\bar{R}(w)$ durch (IV.14) und beobachten, dass wegen $|w - z| \geq r/2$

$$\|\bar{R}(w)\|_{\text{op}} \leq 2 \max_{z \in \partial D(\lambda, r)} \|(A - z)^{-1}\|_{\text{op}} = 2M < \infty. \quad (\text{IV.38})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

Wir führen nun zwei zu (IV.18) ähnliche Berechnungen durch. Einerseits ist

$$\begin{aligned}
\bar{R}(w)P &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \int_{\tilde{z} \in \partial D(\lambda, r/3)} \frac{1}{w-z} \frac{1}{A-z} \frac{1}{A-\tilde{z}} dz d\tilde{z} \\
&= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2 \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \int_{\tilde{z} \in \partial D(\lambda, r/3)} \left(\frac{1}{A-z} - \frac{1}{A-\tilde{z}}\right) \frac{dz d\tilde{z}}{(w-z)(z-\tilde{z})} \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, R)} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{\tilde{z} \in \partial D(\lambda, r/3)} \frac{d\tilde{z}}{z-\tilde{z}} \right\} \frac{dz}{(w-z)(A-z)} \\
&\quad - \frac{-1}{2\pi i} \int_{\tilde{z} \in \partial D(\lambda, r/3)} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{(w-z)(z-\tilde{z})} \right\} \frac{d\tilde{z}}{A-\tilde{z}}.
\end{aligned} \tag{IV.39}$$

Da $z \notin \overline{D(\lambda, r/3)}$, verschwindet $\int_{\tilde{z} \in \partial D(\lambda, r/3)} \frac{d\tilde{z}}{z-\tilde{z}}$, und da $w, \tilde{z} \in D(\lambda, r)$ beide im Inneren der Kontur $\partial D(\lambda, r)$ liegen, verschwindet auch $\int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{(w-z)(z-\tilde{z})}$. Es folgt, dass

$$P\bar{R}(w) = \bar{R}(w)P = 0. \tag{IV.40}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
A\bar{R}(w) &= \bar{R}(w)A = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{1}{w-z} \frac{A}{A-z} dz \\
&= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{w-z} - \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{-z}{w-z} \frac{dz}{A-z} \\
&= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{w-z} - \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{dz}{A-z} + \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{z \in \partial D(\lambda, r)} \frac{w}{w-z} \frac{dz}{A-z} \\
&= \mathbb{1} - P + w\bar{R}(w),
\end{aligned} \tag{IV.41}$$

woraus wir

$$(A-w)\bar{R}(w) = \bar{R}(w)(A-w) = \mathbb{1} - P \tag{IV.42}$$

gewinnen. Also ist $\bar{R}(w) = (\mathbb{1} - P)\bar{R}(w)(\mathbb{1} - P)$ die Inverse der Restriktion von $A - w$ auf $\text{Ker}(P) \cap \mathcal{D}$. \square

IV.3. Analytische Familien und Störungstheorie isolierter, einfacher Eigenwerte

Wir führen zunächst den Begriff der *analytischen Familie vom Typ A* ein und zeigen seinen engen Zusammenhang mit der relativen Beschränktheit.

Definition IV.7. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Umgebung von $0 \in \Omega$ und nichtleer, \mathfrak{H} ein (separabler komplexer) Hilbert-Raum und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H}$ ein dichter Unterraum. Eine Abbildung $(T, \mathcal{D}) : \Omega \rightarrow \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ heißt **analytische Familie vom Typ A** : \Leftrightarrow

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

- (i) Für alle $\beta \in \Omega$ ist T_β abgeschlossen.
- (ii) $T : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})$ ist analytisch, wobei der Hilbert-Raum $(\mathcal{D}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ durch das Graphskalarprodukt $\langle \varphi | \psi \rangle_{\mathcal{D}} := \langle T_0 \varphi | T_0 \psi \rangle + \langle \varphi | \psi \rangle$ gegeben ist.

Lemma IV.8. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $(T, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator und $(V, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) (V, \mathcal{D}) ist relativ T -beschränkt;
- \Leftrightarrow (ii) $\mathbb{C} \ni \beta \mapsto T_\beta := T + \beta V \in \mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})$ ist eine analytische Familie vom Typ A.

Beweis. Sind $\beta, \beta_0 \in \mathbb{C}$, mit $\beta \neq \beta_0$, so ist

$$\frac{T_\beta - T_{\beta_0}}{\beta - \beta_0} = V. \quad (\text{IV.43})$$

(i) \Rightarrow (ii): Ist (V, \mathcal{D}) relativ T -beschränkt mit $\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|$, so ist

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\| \leq \sqrt{2} \max(a, b) \sqrt{\|T\psi\|^2 + \|\psi\|^2} = \sqrt{2} \max(a, b) \|\psi\|_{\mathcal{D}}, \quad (\text{IV.44})$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}$ und daher $V \in \mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})$ mit $\|V\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})}$.

(i) \Leftarrow (ii): Ist $\beta \mapsto T + \beta V$ eine analytische Familie vom Typ A, so ist die Ableitung ein beschränkter Operator $\mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{H}$, d.h. für alle $\psi \in \mathcal{D}$ ist

$$\|V\psi\| \leq \|V\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})} \|\psi\|_{\mathcal{D}} \leq \|V\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})} \sqrt{\|T\psi\|^2 + \|\psi\|^2} = \|V\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D}; \mathfrak{H})} (\|T\psi\| + \|\psi\|). \quad (\text{IV.45})$$

□

Zur Vorbereitung des Beweises der Hauptaussage dieses Abschnitts beweisen wir noch folgendes Lemma

Lemma IV.9. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $P, Q \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zwei Projektionen. Ist $\|P - Q\|_{\text{op}} < 1$, so ist $\dim \text{Ran}(P) = \dim \text{Ran}(Q)$ (wobei auch beide Seiten unendlich sein können).*

Beweis. Wir setzen $X := \text{Ran}(P) \subseteq \mathfrak{H}$ und $Y := \text{Ran}(Q) \subseteq \mathfrak{H}$ und zeigen, dass $\dim(X) \neq \dim(Y)$ die Normschränke $\|P - Q\|_{\text{op}} \geq 1$ nach sich zieht. Dazu können wir o.B.d.A. $\dim(X) > \dim(Y)$ annehmen. Insbesondere sind dann $\dim(Y) < \infty$ und $\dim(X) \geq \dim(Y) + 1$.

Wir bezeichnen weiterhin mit $\widehat{Q} := Q|_X \in \mathcal{B}(X; \mathfrak{H})$ die Einschränkung von Q auf X . Gemäß eines Lemmas der elementaren linearen Algebra gilt $\dim \text{Ker}(\widehat{Q}) + \dim \text{Ran}(\widehat{Q}) = \dim(X)$ und wegen $\dim \text{Ran}(\widehat{Q}) \subseteq Y$ auch

$$\dim \text{Ker}(\widehat{Q}) = \dim(X) - \dim \text{Ran}(\widehat{Q}) \geq \dim(X) - \dim(Y) \geq 1. \quad (\text{IV.46})$$

Andererseits ist

$$\text{Ker}(\widehat{Q}) = \{\varphi \in X \mid Q\varphi = 0\} = \text{Ran}(P) \cap \text{Ker}(Q), \quad (\text{IV.47})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

und zusammen mit (IV.46) erhalten wir die Existenz eines normierten Vektors $\varphi \in \text{Ran}(P) \cap \text{Ker}(Q)$, für den dann entsprechend

$$\|(P - Q)\varphi\| = \|P\varphi\| = \|\varphi\| = 1 \quad (\text{IV.48})$$

gilt. Somit ist dann $\|P - Q\|_{\text{op}} \geq 1$. □

Satz IV.10. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $(T_0, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator, $(V, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ relativ T_0 -beschränkt und $T_\beta := T_0 + \beta V$ für $\beta \in \mathbb{C}$. Sei außerdem $\lambda_0 \in \sigma(T_0)$ ein einfacher, isolierter Eigenwert von T_0 mit normiertem Eigenvektor $\psi_0 \in \mathcal{D}$. Dann gibt es $r, \rho > 0$ so, dass folgende Aussagen gelten:*

- (i) *Für $\beta \in D(0, \rho)$ besitzt T_β einen einfachen und isolierten Eigenwert $\lambda_\beta \in D(\lambda_0, r)$, und dies ist der einzige Spektralwert in der Kreisscheibe, $\sigma(T_\beta) \cap D(\lambda_0, r) = \{\lambda_\beta\}$.*
- (ii) *$D(0, \rho) \ni \beta \mapsto \lambda_\beta \in D(\lambda_0, r)$ ist analytisch.*
- (iii) *Bezeichnet P_β die durch das Dunford-Cauchy-Integral (IV.12) definierte Projektion auf λ_β , so ist auch $D(0, \rho) \ni \beta \mapsto P_\beta \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ analytisch.*

Beweis. Da V relativ T_0 -beschränkt ist, gibt es Konstanten $a, b > 0$ so, dass $\|V\psi\| \leq a\|T_0\psi\| + b\|\psi\|$, für alle $\psi \in \mathcal{D}$ gilt. Weiterhin schließen wir aus der Annahme, dass λ_0 ein isolierter Eigenwert von T_0 ist, dass $\dot{D}(\lambda_0, 3r) = D(\lambda_0, 3r) \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(T_0)$, für $r > 0$ genügend klein, ist. Analog zu (IV.16) erhalten wir

$$M := \max_{|\zeta|=2r} \left\| (T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1} \right\|_{\text{op}} < \infty. \quad (\text{IV.49})$$

Außerdem folgt aus (IV.49) und der relativen T_0 -Beschränktheit von V , dass für alle $|\zeta| = 2r$ und alle $\varphi \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \|V(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\varphi\| &\leq a\|T_0(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\varphi\| + b\|(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\varphi\| \\ &\leq a\|1 + (\lambda_0 - \zeta)(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\|_{\text{op}}\|\varphi\| + b\|(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\|_{\text{op}}\|\varphi\| \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

und damit

$$\forall |\zeta| = 2r : \quad \|V(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2\tilde{\rho}} := a(1 + (|\lambda_0| + 2r)M) + bM. \quad (\text{IV.51})$$

Damit ist für $|\zeta| = 2r$ und $|\beta| < \tilde{\rho}$ die Neumann-Reihe

$$R_\beta(\zeta) := (T_\beta - \lambda_0 - \zeta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1} [(-\beta V)(T_0 - \lambda_0 - \zeta)^{-1}]^n \quad (\text{IV.52})$$

normkonvergent und insbesondere $T_\beta - \lambda_0 - \zeta$ invertibel mit

$$\|R_\beta(\zeta)\|_{\text{op}} = \|(T_\beta - \lambda_0 - \zeta)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 2M. \quad (\text{IV.53})$$

$$\|V R_\beta(\zeta)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2\tilde{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{\tilde{\rho}}. \quad (\text{IV.54})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

Außerdem erhalten wir für $\tilde{\beta}, \beta \in D(0, \tilde{\rho})$, $\tilde{\beta} \neq \beta$, dass

$$\begin{aligned} \frac{R_{\tilde{\beta}}(\zeta) - R_{\beta}(\zeta)}{\tilde{\beta} - \beta} + R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) &= - [R_{\tilde{\beta}}(\zeta) - R_{\beta}(\zeta)] V R_{\beta}(\zeta) \\ &= (\tilde{\beta} - \beta) R_{\tilde{\beta}}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta), \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

was

$$\left\| \frac{R_{\tilde{\beta}}(\zeta) - R_{\beta}(\zeta)}{\tilde{\beta} - \beta} + R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) \right\|_{\text{op}} \leq \frac{8M}{\tilde{\rho}^2} |\tilde{\beta} - \beta| \quad (\text{IV.56})$$

nach sich zieht. Somit ist $D(0, \tilde{\rho}) \ni \beta \mapsto R_{\beta}(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ für jedes $\zeta \in \partial D(0, 2r)$ holomorph mit

$$\frac{dR_{\beta}(\zeta)}{d\beta} = -R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta). \quad (\text{IV.57})$$

Analog zeigt man, dass für festes $\beta \in D(0, \tilde{\rho})$ auch $\zeta \mapsto R_{\beta}(\zeta)$ in einem kleinen offenen Annulus $D(0, 2r + \varepsilon) \setminus D(0, 2r - \varepsilon)$, der $D(0, 2r)$ enthält, holomorph ist mit

$$\frac{dR_{\beta}(\zeta)}{d\zeta} = -R_{\beta}(\zeta)^2. \quad (\text{IV.58})$$

zu (iii): Insbesondere ist $\zeta \mapsto R_{\beta}(\zeta)$ entlang des Kreises $\zeta \in D(0, 2r)$ stetig und das Dunford-Cauchy-Integral

$$P_{\beta} := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(\lambda_0, 2r)} \frac{dz}{T_{\beta} - z} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2r)} R_{\beta}(\zeta) d\zeta \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \quad (\text{IV.59})$$

ist wohldefiniert, beschränkt in Norm und eine Projektion, $P_{\tilde{\beta}}^2 = P_{\tilde{\beta}}$. Sind weiterhin $\tilde{\beta}, \beta \in D(0, \tilde{\rho})$ mit $\tilde{\beta} \neq \beta$, so folgt aus (IV.56), dass

$$\frac{P_{\tilde{\beta}} - P_{\beta}}{\tilde{\beta} - \beta} + \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2r)} R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) d\zeta = -\frac{\tilde{\beta} - \beta}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2r)} R_{\tilde{\beta}}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) d\zeta. \quad (\text{IV.60})$$

Dies impliziert die Holomorphie der Abbildung $D(0, \tilde{\rho}) \ni \beta \mapsto P_{\beta} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ mit

$$\frac{dP_{\beta}}{d\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2r)} R_{\beta}(\zeta) V R_{\beta}(\zeta) d\zeta \quad \text{und} \quad \sup_{\beta \in D(0, \tilde{\rho})} \left\| \frac{dP_{\beta}}{d\beta} \right\|_{\text{op}} \leq \frac{2r M}{\tilde{\rho}}. \quad (\text{IV.61})$$

zu (i) und (ii): Da $D(0, \tilde{\rho})$ zusammenhängend ist, können je zwei Punkte $\tilde{\beta}, \beta \in D(0, \tilde{\rho})$ durch einen stetigen Weg verbunden werden, und da $D(0, \tilde{\rho})$ sogar konvex ist, können wir $\tilde{\beta}$ und $\beta \neq \tilde{\beta}$ auch etwa durch das Geradensegment $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(0, \tilde{\rho})$, $\beta(t) := t\tilde{\beta} + (1-t)\beta$ verbinden. Dann sind $P_{\beta} = P_{\beta(0)}$, $P_{\tilde{\beta}} = P_{\beta(1)}$ und

$$\|P_{\beta(t)} - P_{\beta(s)}\|_{\text{op}} \leq (t-s) \frac{2r M |\tilde{\beta} - \beta|}{\tilde{\rho}} \leq 2r M (t-s) < 1, \quad (\text{IV.62})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

für $s, t \in [0, 1]$ mit $0 < t - s < (2rM)^{-1}$. Aus Lemma IV.9 folgt nun, dass $\dim \text{Ran}[P_{\beta(t)}] = \dim \text{Ran}[P_{\beta(s)}]$, damit auch $\dim \text{Ran}[P_{\tilde{\beta}}] = \dim \text{Ran}[P_{\beta}]$, für alle $\tilde{\beta}, \beta \in D(0, \tilde{\rho})$ und schließlich

$$\forall \beta \in D(0, \tilde{\rho}) : \quad \dim \text{Ran}[P_{\beta}] = 1. \quad (\text{IV.63})$$

Weiterhin ist mit P_0 auch P_0^* eine Projektion derselben Dimension $\dim \text{Ran}(P_0^*) = \dim \text{Ran}(P_0) = 1$ und Norm, und wir notieren

$$\psi_0^* := P_0^* \psi_0 \in \text{Ran}(P_0^*). \quad (\text{IV.64})$$

Da

$$\langle \psi_0^* | \psi_0 \rangle = \langle P_0^* \psi_0 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | P_0 \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1, \quad (\text{IV.65})$$

sind $\psi_0^* \neq 0$ und deshalb $\text{Ran}(P_0^*) = \mathbb{C} \cdot \psi_0^*$. Wir beobachten nun, dass $P_0 \psi_0 = \psi_0$ und mit (IV.61) deshalb

$$|\langle \psi_0^* | P_{\beta} \psi_0 \rangle| = |1 + \langle \psi_0^* | (P_{\beta} - P_0) \psi_0 \rangle| \geq 1 - \frac{2rM \|\psi_0^*\| \beta}{\tilde{\rho}} \geq \frac{1}{2}, \quad (\text{IV.66})$$

$$\left| \|P_{\beta} \psi_0\| - 1 \right| \leq \|(P_{\beta} - P_0) \psi_0\| \leq \frac{2rM\beta}{\tilde{\rho}} \leq \frac{1}{2}, \quad (\text{IV.67})$$

gilt, falls $\beta \in D(0, \rho)$ mit

$$\rho := \frac{\tilde{\rho}}{2 + 4rM(1 + \|\psi_0^*\|)} < \frac{\tilde{\rho}}{2}. \quad (\text{IV.68})$$

Dank (IV.66) existiert für $\beta \in D(0, \rho)$ der Rayleigh-Quotient

$$\lambda_{\beta} := \frac{\langle \psi_0^* | T_{\beta} P_{\beta} \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0^* | P_{\beta} \psi_0 \rangle}, \quad (\text{IV.69})$$

und der Vektor

$$\psi_{\beta} := P_{\beta} \psi_0 \quad (\text{IV.70})$$

erfüllt mit (IV.67) die Normschränke

$$\frac{1}{2} \leq \|\psi_{\beta}\| \leq \frac{3}{2} \quad (\text{IV.71})$$

und spannt damit $\text{Ran}(P_{\beta}) = \mathbb{C} \cdot \psi_{\beta} \subseteq \mathcal{D}$ auf. Außerdem folgt aus $|\langle \psi_0^* | P_{\beta} \psi_0 \rangle| \geq \frac{1}{2}$ und der Analytizität von $\beta \mapsto P_{\beta}$ und $\beta \mapsto T_{\beta}$ auch die Analytizität von $\beta \mapsto \lambda_{\beta}$.

Wie in Satz IV.6 (iii)-(v) sind $\text{Ran}(P_{\beta})$ und $\text{Ker}(P_{\beta})$ komplementäre, abgeschlossene und unter T_{β} invariante Unterräume

$$\text{Ran}(P_{\beta}) + \text{Ker}(P_{\beta}) = \mathfrak{H}, \quad \text{Ran}(P_{\beta}) \cap \text{Ker}(P_{\beta}) = \{0\}, \quad (\text{IV.72})$$

$$T_{\beta}[\text{Ran}(P_{\beta})] \subseteq \text{Ran}(P_{\beta}), \quad T_{\beta}[\text{Ker}(P_{\beta}) \cap \mathcal{D}] \subseteq \text{Ker}(P_{\beta}). \quad (\text{IV.73})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

Insbesondere folgt, dass es eine komplexe Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ so gibt, dass $T_\beta \psi_\beta = \mu \psi_\beta$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\mu \langle \psi_0^* | \psi_\beta \rangle = \langle \psi_0^* | T_\beta \psi_\beta \rangle = \lambda_\beta \langle \psi_0^* | \psi_\beta \rangle \quad (\text{IV.74})$$

und wegen $\langle \psi_0^* | \psi_\beta \rangle = \langle \psi_0^* | T_\beta \psi_0 \rangle \neq 0$ auch $\mu = \lambda_\beta$, d.h. $T_\beta \psi_\beta = \lambda_\beta \psi_\beta$.

Analog zu (IV.14) definieren wir

$$\bar{R}_\beta(\zeta) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\eta \in \partial D(0, 2r)} \frac{1}{\zeta - \eta} \frac{d\eta}{T_\beta - \lambda_0 - \eta}, \quad (\text{IV.75})$$

für $\zeta \in D(\lambda_0, r)$ und $\beta \in D(0, \rho)$ und beobachten, dass wegen $|\zeta - \eta| \geq r$ auch

$$\|\bar{R}_\beta(\zeta)\|_{\text{op}} \leq 2 \max_{|\eta|=2r} \|R_\beta(\eta)\|_{\text{op}} \leq 4M < \infty. \quad (\text{IV.76})$$

Wie in (IV.39)-(IV.42) folgt nun, dass

$$P_\beta \bar{R}_\beta(\zeta) = \bar{R}_\beta(\zeta) P_\beta = 0 \quad (\text{IV.77})$$

$$(T_\beta - \lambda_0 - \zeta) \bar{R}_\beta(\zeta) = \bar{R}_\beta(\zeta) (T_\beta - \lambda_0 - \zeta) = \mathbb{1} - P_\beta, \quad (\text{IV.78})$$

d.h. $\bar{R}_\beta(\zeta) = (\mathbb{1} - P_\beta) \bar{R}_\beta(\zeta) (\mathbb{1} - P_\beta)$ ist die Inverse der Restriktion von $T_\beta - \lambda_0 - \zeta$ auf $\text{Ker}(P_\beta) \cap \mathcal{D}$. Für alle $\beta \in D(0, \rho)$ ist damit aber λ_β der einzige Spektralpunkt in $D(\lambda_0, r)$. \square

Im vorigen Satz IV.10 wurde bewiesen, dass der gestörte isolierte einfache Eigenwert λ_β der Operators $T_\beta = T_0 + \beta V$ durch den Rayleigh-Quotienten (IV.69)

$$\lambda_\beta := \frac{\langle \psi_0^* | T_\beta P_\beta \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0^* | P_\beta \psi_0 \rangle} \quad (\text{IV.79})$$

gegeben und eine analytische Funktion $\beta \mapsto \lambda_\beta$ für kleine $|\beta|$ ist. Insbesondere kann λ_β für kleine $|\beta|$ in eine konvergente Potenzreihe

$$\lambda_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n \quad (\text{IV.80})$$

entwickelt werden. Wir wollen nun kurz beleuchten, wie man die Koeffizienten a_n , die durch Division zweier Potenzen resultieren, berechnet. Die Projektion P_β erhalten wir für $|\beta| < \rho$ durch die normkonvergente Neumann-Reihe

$$P_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 2r)} R_0(\zeta) [V R_0(\zeta)]^k d\zeta \right) \beta^k, \quad (\text{IV.81})$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

und damit auch die Reihe für $T_\beta P_\beta$, nämlich

$$\begin{aligned}
T_\beta P_\beta &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} (T_0 + \beta V) R_0(\zeta) [V R_0(\zeta)]^k d\zeta \right) \beta^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} T_0 R_0(\zeta) [V R_0(\zeta)]^k d\zeta \right) \beta^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} [V R_0(\zeta)]^{k+1} d\zeta \right) \beta^{k+1} \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} T_0 R_0(\zeta) d\zeta \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} (\lambda_0 + \zeta) R_0(\zeta) [V R_0(\zeta)]^k d\zeta \right) \beta^k \\
&= T_0 P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} (\lambda_0 + \zeta) R_0(\zeta) [V R_0(\zeta)]^k d\zeta \right) \beta^k.
\end{aligned} \tag{IV.82}$$

Wir berechnen nun exemplarisch a_1 . Dazu beobachten wir, dass es eine Konstante $C < \infty$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0^* | P_\beta \psi_0 \rangle &= 1 + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} \langle \psi_0 | P_0 R_0(\zeta) V R_0(\zeta) \psi_0 \rangle d\zeta \right) \beta + \gamma_\beta \beta^2 \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right) \langle \psi_0 | P_0 V \psi_0 \rangle \beta + \gamma_\beta \beta^2, \\
&= 1 + \gamma_\beta \cdot \beta^2,
\end{aligned} \tag{IV.83}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0^* | T_\beta P_\beta \psi_0 \rangle &= \lambda_0 + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2r)} (\lambda_0 + \zeta) \langle \psi_0 | P_0 R_0(\zeta) V R_0(\zeta) \psi_0 \rangle d\zeta \right) \beta + \delta_\beta \beta^2 \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D(0,2r)} \frac{\lambda_0 d\zeta}{\zeta^2} + \int_{\partial D(0,2r)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \langle \psi_0 | P_0 V \psi_0 \rangle \beta + \delta_\beta \beta^2 \\
&= \lambda_0 + \langle \psi_0^* | V \psi_0 \rangle \beta + \delta_\beta \beta^2,
\end{aligned} \tag{IV.84}$$

mit $\sup_{|\beta| \leq \rho} \{|\gamma_\beta| + |\delta_\beta|\} \leq C$, wobei wir $\langle \psi_0^* | \varphi \rangle = \langle \psi_0 | P_0 \varphi \rangle$ verwenden, was für jedes $\varphi \in \mathfrak{H}$ richtig ist. Also ist

$$\begin{aligned}
\lambda_\beta &= \frac{\lambda_0 + \langle \psi_0^* | V \psi_0 \rangle \beta + \delta_\beta \beta^2}{1 + \gamma_\beta \beta^2} \\
&= \lambda_0 + \langle \psi_0^* | V \psi_0 \rangle \beta + \left(\delta_\beta - \frac{(\lambda_0 + \langle \psi_0^* | V \psi_0 \rangle \beta + \delta_\beta \beta^2) \gamma_\beta}{1 + \gamma_\beta \beta^2} \right) \beta^2,
\end{aligned} \tag{IV.85}$$

IV. Störungstheorie isolierter Eigenwerte

woraus wir

$$a_1 = \langle \psi_0^* | V \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | P_0 V P_0 \psi_0 \rangle \quad (\text{IV.86})$$

gewinnen.