

III. Kato-Störungstheorie

Wir definieren zuerst den für unbeschränkte Operatoren zentralen Begriff der *relativen Beschränktheit*.

Definition III.1. Seien $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein (separabler komplexer) Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}_A), (B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zwei dicht definierte (lineare) Operatoren auf \mathfrak{H} .

- (i) (B, \mathcal{D}_B) heißt **relativ A -beschränkt** \Leftrightarrow :
 $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$, und es gibt $a, b \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_A: \quad \|B\varphi\| \leq a \cdot \|A\varphi\| + b \|\varphi\|. \quad (\text{III.1})$$

In diesem Fall heißt a **relative Schranke**.

- (ii) (B, \mathcal{D}_B) heißt **infinitesimale Störung von (A, \mathcal{D}_A)** \Leftrightarrow :
 $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{D}_A$, und für alle $a > 0$ gibt es ein $b \equiv b(a) < \infty$ so, dass

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_A: \quad \|B\varphi\| \leq a \cdot \|A\varphi\| + b \|\varphi\|. \quad (\text{III.2})$$

- (iii) (A, \mathcal{D}_A) heißt **halbbeschränkt (nach unten beschränkt)** \Leftrightarrow :

$$\exists M > -\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_A: \quad \langle \varphi | A\varphi \rangle \geq M \|\varphi\|^2. \quad (\text{III.3})$$

In diesem Fall heißt M **untere Schranke von A** , und wir schreiben $A \geq M$.

III.1. Der Satz von Kato-Rellich

Mit diesen Begriffen können wir das erste Hauptresultat dieses Kapitels –den Satz von Kato-Rellich– formulieren.

Satz III.2 (Kato-Rellich). *Seien $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum, $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ symmetrisch und dicht definiert, $(B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ symmetrisch und relativ A -beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Ist $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert, so ist auch $(A + B, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert;*
- (i) *Ist $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ wesentlich selbstadjungiert, so ist auch $(A + B, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ wesentlich selbstadjungiert;*
- (iii) *Ist (A, \mathcal{D}_A) wesentlich selbstadjungiert und halbbeschränkt mit unterer Schranke $M > -\infty$, so ist auch $(A + B, \mathcal{D}_A)$ wesentlich selbstadjungiert und halbbeschränkt, und zwar mit unterer Schranke*

$$A + B \geq M - \max \left\{ \frac{b}{1-a}, |M| \right\}. \quad (\text{III.4})$$

III. Kato-Störungstheorie

Beweis. Seien $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert und $z = \lambda + i\mu$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\mu \neq 0$. Dann ist $A - z$ invertibel, und $(A - z)^{-1}\psi \in \mathcal{D}_A$, für alle $\psi \in \mathfrak{H}$. Mit (III.1) und (I.39) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|B(A - z)^{-1}\psi\| &\leq a \|A(A - z)^{-1}\psi\| + b \|(A - z)^{-1}\psi\| \\ &\leq \left(a \left\| \frac{A}{A - z} \right\|_{\text{op}} + b \left\| \frac{1}{A - z} \right\|_{\text{op}} \right) \|\psi\| \\ &= \left(a \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left| \frac{\tau}{\tau - z} \right| + b \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left| \frac{1}{\tau - z} \right| \right) \|\psi\|. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Zu (i): Somit ist für $\lambda := 0$

$$\begin{aligned} \|B(A - z)^{-1}\|_{\text{op}} &\leq a \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left| \frac{\tau}{\tau - i\mu} \right| + b \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left| \frac{1}{\tau - i\mu} \right| \\ &= a \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left(\frac{\tau^2}{\tau^2 + \mu^2} \right)^{1/2} + b \sup_{\tau \in \sigma(A)} \left(\frac{1}{\tau^2 + \mu^2} \right)^{1/2} \\ &= a + \frac{b}{|\mu|}. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Wir wählen $|\mu| := \frac{2b}{1-a} < \infty$ und erhalten mit

$$Q := -B(A - i\mu)^{-1}, \quad \text{dass} \quad \|Q\|_{\text{op}} \leq a + \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2} < 1. \quad (\text{III.7})$$

Wir beobachten nun, dass

$$A + B - i\mu = (\mathbb{1} - Q)(A - i\mu) \quad (\text{III.8})$$

gilt, wobei $\mathbb{1} - Q$ invertibel ist, da die Neumann-Reihe

$$(\mathbb{1} - Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \quad (\text{III.9})$$

wegen (III.7) normkonvergent ist.

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $(A + B, \mathcal{D}_A)$. Sei dazu $(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}_A$ mit $\psi_n \rightarrow \psi$ und $(A + B)\psi_n \rightarrow \varphi$, für $n \rightarrow \infty$. Dann ist nach (III.8)

$$\begin{aligned} A\psi_n &= i\mu\psi_n + (A - i\mu)\psi_n = i\mu\psi_n + (\mathbb{1} - Q)^{-1}(A + B - i\mu)\psi_n \\ &= i\mu[\mathbb{1} - (\mathbb{1} - Q)^{-1}]\psi_n + (\mathbb{1} - Q)^{-1}(A + B)\psi_n, \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

also

$$A\psi_n \rightarrow i\mu[\psi - (\mathbb{1} - Q)^{-1}\psi] + (\mathbb{1} - Q)^{-1}\varphi. \quad (\text{III.11})$$

Da (A, \mathcal{D}_A) abgeschlossen ist, folgt $\psi \in \mathcal{D}_A$ und

$$A\psi = i\mu\psi - i\mu(\mathbb{1} - Q)^{-1}\psi + (\mathbb{1} - Q)^{-1}\varphi, \quad (\text{III.12})$$

III. Kato-Störungstheorie

was mit (III.8) auch

$$\varphi = (\mathbb{1} - Q)(A - i\mu)\psi + i\mu\psi = (A + B)\psi \quad (\text{III.13})$$

impliziert. Somit ist $(A + B, \mathcal{D}_A)$ abgeschlossen. Wegen $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$ ist $(A + B, \mathcal{D}_A)$ auch symmetrisch. Schließlich ist $(A - i\mu)\mathcal{D}_A = \text{Ran}(A - i\mu) = \mathfrak{H}$ und deshalb auch

$$(A + B - i\mu)\mathcal{D}_A = (\mathbb{1} - Q)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}, \quad (\text{III.14})$$

da $(\mathbb{1} - Q)$ invertibel ist. Insbesondere sind

$$\text{Ran}(A + B + i\frac{2b}{1-a}) = \text{Ran}(A + B - i\frac{2b}{1-a}) = \mathfrak{H}, \quad (\text{III.15})$$

und $(A + B, \mathcal{D}_A)$ ist selbstadjungiert.

Zu (ii): Analog zu (i).

Zu (iii): Aus (III.5) folgt mit $\mu = 0$ und $\lambda < M$, dass wegen $\sigma(A) \subseteq [M, \infty)$

$$\begin{aligned} \|B(A-\lambda)^{-1}\|_{\text{op}} &\leq a \sup_{\tau \geq M} \left| \frac{\tau}{\tau - \lambda} \right| + b \sup_{\tau \geq M} \left| \frac{1}{\tau - \lambda} \right| = a \sup_{r \geq 0} \left| \frac{M+r}{M+r-\lambda} \right| + \frac{b}{M-\lambda} \\ &\leq a \sup_{r \geq 0} \left\{ \frac{|M|+r}{M-\lambda+r} \right\} + \frac{b}{M-\lambda} = a \max \left\{ 1, \frac{|M|}{M-\lambda} \right\} + \frac{b}{M-\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Für $\lambda < M$ genügend klein gilt

$$M - \lambda > \max \left\{ |M|, \frac{b}{1-a} \right\}, \quad (\text{III.17})$$

was

$$\|B(A - \lambda)^{-1}\|_{\text{op}} \leq a + \frac{b}{M - \lambda} < 1 \quad (\text{III.18})$$

nach sich zieht. Somit beweist eine Neumann-Reihenentwicklung, dass

$$(A + B - \lambda) = [\mathbb{1} + B(A - \lambda)^{-1}](A - \lambda) \quad (\text{III.19})$$

invertibel ist. Insbesondere ist

$$\inf \sigma(A + B) \geq M - \max \left\{ |M|, \frac{b}{1-a} \right\}. \quad (\text{III.20})$$

□

Lemma III.3. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, (A, \mathcal{D}_A) ein selbstadjungierter, halbbeschränkter Operator, $(B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ mit $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$, und gelte $B(A + E)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, für $E < \infty$ genügend groß, mit*

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \|B(A + E)^{-1}\|_{\text{op}} = 0. \quad (\text{III.21})$$

Dann ist (B, \mathcal{D}_B) eine infinitesimale Störung von (A, \mathcal{D}_A) .

III. Kato-Störungstheorie

Beweis. Für $\psi \in \mathcal{D}_A$ und $E \gg 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|B\psi\| &\leq \|B(A+E)^{-1}\|_{\text{op}} \|(A+E)\psi\| \\ &\leq \|B(A+E)^{-1}\|_{\text{op}} \|A\psi\| + E \|B(A+E)^{-1}\|_{\text{op}} \|\psi\|. \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Für jedes $a > 0$ gibt es ein $E_a < 0$, so dass $\|B(A+E_a)^{-1}\|_{\text{op}} \leq a$, und mit $b_a := E_a a$ folgt dann $\|B\psi\| \leq a\|A\psi\| + b_a\|\psi\|$ aus (III.21). \square

III.2. Selbstadjungiertheit von Schrödinger-Operatoren

Wir wollen nun den Satz III.2 von Kato-Rellich auf $A = -\Delta$ und $B = V(x)$ anwenden und so in Raumdimensionen $d \leq 3$ die Selbstadjungiertheit von Schrödinger-Operatoren $-\Delta + V(x)$ beweisen. Solche Schrödinger-Operatoren sind die Standard-Hamilton-Operatoren der nichtrelativistischen Quantenmechanik.

Lemma III.4. *Seien $d \leq 3$ und $V \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist der Multiplikationsoperator $(V\psi)(x) := V(x)\psi(x)$ definiert auf $H^2(\mathbb{R}^d)$, und es gilt*

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \|V(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} = 0. \quad (\text{III.23})$$

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, so dass auch $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, und sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|V(f * \psi)\|_{L^2}^2 &= \int |V(z)|^2 \left| \int f(x-z) \psi(x) d^d x \right|^2 d^d z \\ &\leq \int |V(z)|^2 \left(\int |f(x-z)|^2 d^d x \right) \left(\int |\psi(x)|^2 d^d x \right) d^d z \\ &= \|V\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 \|\psi\|_{L^2}^2 = \|V\|_{L^2}^2 \|\hat{f}\|_{L^2}^2 \|\psi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Wir wählen nun $f(x) := (-\Delta + E)^{-1}(x)$, d.h. $\hat{f}(p) = \frac{1}{p^2 + E}$, und berechnen

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 &= \int \frac{d^d p}{(p^2 + E)^2} \leq 2 \int \frac{d^d p}{(|p| + E)^4} = 2C_d \int_0^\infty \frac{s^{d-1} ds}{(s + E)^4} \\ &\leq 2C_d \int_0^\infty \frac{ds}{(s + E)^{5-d}} = \frac{2C_d}{4-d} E^{-4+d}. \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Also ist

$$\|V(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} \leq \|V\|_{L^2} \sqrt{\frac{2C_d}{4d}} E^{-2+\frac{d}{2}} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{III.26})$$

\square

Satz III.5. *Sei $V \in L^2 + L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ mit $d \leq 3$. Dann ist $(-\Delta_x - V(x), H^2(\mathbb{R}^d))$ selbstadjungiert.*

III. Kato-Störungstheorie

Beweis. Da $V \in L^2 + L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ ist, gibt es $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ und eine beschränkte Funktion $V_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $V = V_2 + V_\infty$. Für $E > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} \|V(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} &\leq \|V_2(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} + \|V_\infty(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \|V_2(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} + \frac{\|V_\infty\|_\infty}{E}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Also ist

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \|V(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} = \lim_{E \rightarrow \infty} \|V_2(-\Delta + E)^{-1}\|_{\text{op}} = 0, \quad (\text{III.28})$$

gemäß Lemma III.4. Da V reell ist, ist V auch symmetrisch auf $\mathcal{D}_V \supseteq \mathcal{D}_{-\Delta} = H^2(\mathbb{R}^d)$, und aus dem Satz III.2 von Kato-Rellich folgt die Selbstadjungiertheit von $(-\Delta - V, H^2(\mathbb{R}^d))$. \square

Bemerkungen und Beispiele.

- Sind $V(x) = |x|^{-\alpha}$ und $\alpha > 0$, so schreiben wir $V = V_2 + V_\infty$ mit

$$V_2(x) := \mathbb{1}(|x| \leq 1) \cdot |x|^{-\alpha} \quad \text{und} \quad V_\infty(x) := \mathbb{1}(|x| > 1) \cdot |x|^{-\alpha}. \quad (\text{III.29})$$

Dann ist offensichtlich $|V_\infty(x)| \leq 1$, und

$$\int V_2(x)^2 d^d x = \int_{|x| \leq 1} \frac{d^d x}{|x|^{2\alpha}} = C_d \int_0^1 s^{d-1-2\alpha} ds < \infty, \quad (\text{III.30})$$

genau dann, wenn $\alpha < \frac{d}{2}$.

- Die Bedingung $\alpha < \frac{d}{2}$ ist nicht optimal, sichert jedoch die Selbstadjungiertheit von eines *wasserstoffähnlichen Atoms*, das für Kernladung $Z > 0$ durch den Hamilton-Operator $(-\Delta - \frac{Z}{|x|}, H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2))$ repräsentiert wird.
- Mit etwas größerem technischen Aufwand kann man die maximale Familie von Potenzialen, die auf selbstadjungierte Operatoren führen, fast ganz bestimmen. Dies führt auf die *Stummel-Klassen* S_d für Potenziale V , s. [?].

III.3. Essenzielles Spektrum von Schrödinger-Operatoren

Für Schrödinger-Operatoren des Typs $-\Delta + V(x)$ kann man für viele Potenziale V mit dem Beweis seiner Selbstadjungiertheit in einem Zug auch sein essenzielles Spektrum bestimmen, nämlich $\sigma_{\text{ess}}[-\Delta + V(x)] = \mathbb{R}_0^+$. Der Schlüssel dafür ist der Begriff der *relativen Kompaktheit*.

Definition III.6. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein selbstadjungierter linearer Operator. Ein Operator $(B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ heißt **relativ kompakt zu (A, \mathcal{D}_A)**

$$:\Leftrightarrow \mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A \quad \text{und} \quad \exists z \in \rho(A) : B(A - z)^{-1} \in \text{Com}(\mathfrak{H}). \quad (\text{III.31})$$

Lemma III.7. Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein selbstadjungierter linearer Operator und $(B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}(B)$ relativ kompakt zu (A, \mathcal{D}_A) . Dann ist (B, \mathcal{D}_B) eine infinitesimale Störung von (A, \mathcal{D}_A) .

III. Kato-Störungstheorie

Beweis. Wie in Lemma III.3 kann man sehen, dass es reicht,

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \|B(A - iE)^{-1}\|_{\text{op}} = 0 \quad (\text{III.32})$$

zu zeigen. Zum Beweis von (III.32) wählen wir $\varepsilon > 0$ und $z \in \rho(A)$ so, dass $B(A - z)^{-1} \in \text{Com}(\mathfrak{H})$. Da $B(A - z)^{-1}$ durch Operatoren endlichen Ranges approximiert werden kann, gibt es ein ONS $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathcal{D}_A$, $N \in \mathbb{N}$, und Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\|B(A - z)^{-1} - M\|_{\text{op}}, \quad \text{wobei} \quad M = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|. \quad (\text{III.33})$$

Ist weiterhin $R < \infty$ genügend groß, so ist

$$\|M \mathbb{1}(|A| > R)\|_{\text{op}} \leq \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}| \|\mathbb{1}(|A| > R)\varphi_j\| \leq \varepsilon, \quad (\text{III.34})$$

da $\lim_{R \rightarrow \infty} \|\mathbb{1}(|A| > R)\psi\| = 0$ für alle $\psi \in \mathfrak{H}$ gilt. Somit erhalten wir für alle $E > 0$

$$\begin{aligned} \|B(A - iE)^{-1}\|_{\text{op}} &= \left\| B(A - z)^{-1} \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} \\ &\leq \left\| \left\{ B(A - z)^{-1} - M \right\} \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} + \left\| M \mathbb{1}(|A| > R) \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} \\ &\quad + \left\| M \mathbb{1}(|A| \leq R) \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} \\ &\leq 2\varepsilon \left\| \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} + \left\| M \mathbb{1}(|A| \leq R) \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}}. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Wählen wir $R > 0$ genügend groß, so ist

$$\left\| \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| \right) \mathbb{1}[|A| > R] \right\|_{\text{op}} \leq \varepsilon. \quad (\text{III.36})$$

Ist weiterhin $E > 0$ genügend groß, so sind

$$\left\| \frac{A - z}{A - iE} \right\|_{\text{op}} \leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{r - z}{r - iE} \right| \leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \left\{ 1 + \frac{E + |z|}{\sqrt{r^2 + E^2}} \right\} = 1 + \frac{E + |z|}{E} \leq 3 \quad (\text{III.37})$$

und

$$\left\| \mathbb{1}(|A| \leq R) \left(\frac{A - z}{A - iE} \right) \right\|_{\text{op}} \leq \sup_{|r| \leq R} \left| \frac{r - z}{r - iE} \right| \leq \frac{R + |z|}{|E|} \leq \varepsilon. \quad (\text{III.38})$$

Damit erhalten wir aus (III.35), dass

$$\|B(A - iE)^{-1}\|_{\text{op}} \leq 6\varepsilon + \left(\|B(A - z)^{-1}\|_{\text{op}} + \varepsilon \right) \varepsilon, \quad (\text{III.39})$$

und (III.32) folgt im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$. □

III. Kato-Störungstheorie

Satz III.8. *Seien \mathfrak{H} ein Hilbert-Raum, $(A, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein selbstadjungierter und halbbeschränkter linearer Operator und $(B, \mathcal{D}_B) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ symmetrisch und relativ kompakt zu (A, \mathcal{D}_A) . Dann ist $(A+B, \mathcal{D}_A) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein selbstadjungierter und halbbeschränkter linearer Operator und es gilt*

$$\sigma_{\text{ess}}(A+B) = \sigma_{\text{ess}}(A). \quad (\text{III.40})$$

Beweis. Nach Lemma III.7 ist (B, \mathcal{D}_B) eine infinitesimale Störung von (A, \mathcal{D}_A) , und mit A ist auch $A+B$ auf \mathcal{D}_A selbstadjungiert und halbbeschränkt. Es bleibt Glg. (III.40) zu zeigen. Aus der Halbbeschränktheit von sowohl A als auch $A+B$ folgt die Existenz einer Zahl $E_0 > -\infty$, so dass $A \geq E_0$ und $A+B \geq E_0$. Für $E < E_0$ und $z \in \rho(A)$ ist dann

$$\begin{aligned} (A-E)^{-1} - (A+B-E)^{-1} &= (A+B-E)^{-1}B(A-E)^{-1} \\ &= (A+B-E)^{-1}B(A-z)^{-1}(A-z)(A-E)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

und wegen $(A+B-E)^{-1}, (A-z)(A-E)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ und $B(A-z)^{-1} \in \text{Com}(\mathfrak{H})$ folgt, dass

$$(A-E)^{-1} - (A+B-E)^{-1} \in \text{Com}(\mathfrak{H}) \quad (\text{III.42})$$

da $\text{Com}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ein zweiseitiges Ideal ist. Glg. (III.40) ergibt sich jetzt aus Satz II.10. \square

Bemerkungen und Beispiele.

- Aus dem Beweis von Lemma III.4 und insbesondere Glg. (III.24) sehen wir, dass ein quadratintegrables Potenzial $V \in L^2(\mathbb{R}^d)$ nicht nur eine infinitesimale Störung des Laplacians $-\Delta$ ist, sondern dass der Operator $V(-\Delta+1)^{-1} \in \mathcal{L}^2[L^2(\mathbb{R}^d)]$ sogar ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, s. Übungsaufgabe.
- Der Operator $V(-\Delta+1)^{-1}$ ist nämlich von der Form $V(x)f(-i\nabla_x)$ mit $\hat{f}(p) = (p^2+1)^{-1}$ und agiert auf Wellenfunktionen $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ durch

$$[V(-\Delta+1)^{-1}\psi](x) = \int a(x,z)\psi(z)d^d z, \quad (\text{III.43})$$

wobei

$$a(x,z) = V(x)\mathfrak{F}^*[\hat{f}](x-z) \quad (\text{III.44})$$

wegen

$$\int |a(x,z)|^2 d^d x d^d z = \|V\|_{L^2}^2 \|\mathfrak{F}^*[\hat{f}]\|_{L^2}^2 = \|V\|_{L^2}^2 \|\hat{f}\|_{L^2}^2 < \infty \quad (\text{III.45})$$

ein quadratintegrabler Integralkern ist.

- Insbesondere folgt für $V \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ und $d \leq 3$ die Selbstadjungiertheit von $-\Delta + V(x)$ auf $H^2(\mathbb{R}^d)$ und

$$\sigma_{\text{ess}}[-\Delta + V(x)] = \sigma_{\text{ess}}[-\Delta] = \mathbb{R}_0^+. \quad (\text{III.46})$$