II. Diskretes und Essentielles Spektrum

II.1. Invertibitilität und Spektrum von Operatoren

Zunächst erinnern wir an die Definition von Spektren, Resolventen usw.

Definition II.1. Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein dicht definierter, abschließbarer linearer Operator.

(i) Der Operator $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ heißt (**beschränkt**) **invertibel** $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) : \qquad A \circ A^{-1} \;=\; \mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \,, \quad A^{-1} \circ A \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \,. \tag{II.1}$$

(ii) Die **Resolventenmenge** des Operators $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ist gegeben durch

$$\rho(A) \;:=\; \big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; A - \lambda \text{ ist beschränkt invertibel} \big\} \,. \tag{II.2}$$

Lemma II.2. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum. Ein dicht definierter, abschließbarer Operator $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ist genau dann beschränkt invertibel, wenn folgende beiden Eigenschaften (i) und (ii) gelten:*

$$(i) \qquad \mathrm{Ran}(A) \subseteq \mathfrak{H} \textit{ ist dicht,} \tag{II.3}$$

$$(ii) \qquad \exists\, m > 0 \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D} : \quad \|A\varphi\| \;\geq\; m \, \|\varphi\| \,, \tag{II.4}$$

und in diesem Fall gilt $\big\|A^{-1}\big\|_{\mathrm{op}} = m^{-1} < \infty$.

Lemma II.3. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

$$(i) \qquad \lambda \;\in\; \sigma(A); \tag{II.5}$$

$$\Leftrightarrow \;(ii) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{1}[|A - \lambda| < \varepsilon] \;\neq\; 0; \tag{II.6}$$

$$\Leftrightarrow \;(iii) \qquad \exists\, (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \; \|\varphi_n\| = 1 : \quad \lim_{n\to\infty} \big\|(A - \lambda)\varphi_n\big\| \;=\; 0 \,. \tag{II.7}$$

Beweis. Wir definieren

$$X \;:=\; \Big\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\Big|\; \forall\, \varepsilon > 0 : \; \mathbb{1}\big[(A - \lambda) < \varepsilon\big] \;\neq\; 0 \Big\} \,, \tag{II.8}$$

$$Y \;:=\; \Big\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\Big|\; \exists\, (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \; \|\varphi_n\| = 1 : \; \lim_{n\to\infty} \big\|(A - \lambda)\varphi_n\big\| = 0 \Big\} \,, \tag{II.9}$$

sodass die behauptete Äquivalenz $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ gleichwertig ist mit

$$\sigma(A) \; = \; X \; = \; Y \, . \tag{II.10}$$

Da $(A, \mathcal{D})$ selbstadjungiert ist, gibt es nach dem Spektralsatz einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, eine Funktion $f : \Omega \to \overline{R}$ und einen unitären Operator $U : \mathfrak{H} \to L^2(\Omega)$, so dass

$$\big[U \, A \, U^* \psi\big](\omega) \; = \; f(\omega) \, \psi(\omega) \, . \tag{II.11}$$

$\underline{\sigma(A) \subseteq X}$: Wir setzen $P_{\lambda,\varepsilon}(A) := \mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon\big]$ und nehmen an, dass $\lambda \notin X$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $P_{\lambda,\varepsilon}(A) = 0$. Wir definieren nun R als Multiplikationsoperator auf $L^2(\Omega)$ durch

$$[R\psi](\omega) \; := \; \frac{\big(1 - P_{\lambda,\varepsilon}[f(\omega)]\big)}{f(\omega) - \lambda} \, \psi(\omega) \, . \tag{II.12}$$

Dann ist $R \in \mathcal{B}\big(L^2(\Omega)\big)$, nämlich

$$\|R\|_{\mathrm{op}} \; = \; \sup_{\omega \in \Omega} \left| \frac{1 - P_{\lambda,\varepsilon}\big[f(\omega)\big]}{f(\omega) - \lambda} \right| \; = \; \sup_{\omega \in \Omega} \left| \frac{\mathbb{1}\big[|f(\omega) - \lambda| \geq \varepsilon\big]}{f(\omega) - \lambda} \right| \; \leq \; \frac{1}{\varepsilon} \; < \; \infty \, . \tag{II.13}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \big[U(A - \lambda)U^* R \, \psi\big](\omega) \; &= \frac{f(\omega) - \lambda}{f(\omega) - \lambda} \, \big(1 - P_{\lambda,\varepsilon}[f(\omega)]\big) \, \psi(\omega) \\ &= \psi(\omega) - \big(U P_{\lambda,\varepsilon}(A) U^* \psi\big)(\omega) \; = \; \psi(\omega) \, , \end{aligned} \tag{II.14}$$

und genauso folgt $R \, U(A - \lambda)U^* \psi = \psi$ und somit ist $U^* R U = A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, da

$$\big\| U^* R \, U \big\|_{\mathrm{op}} \; = \; \|R\|_{\mathrm{op}} \; = \; \frac{1}{\varepsilon} \, . \tag{II.15}$$

Es folgt, dass $\lambda \in \rho(A)$, also $\lambda \notin \sigma(A)$ und damit $X^c \subseteq \sigma(A)^c$, was gleichwertig mit $\sigma(A) \subseteq X$ ist.

$\underline{X \subseteq Y}$: Gilt (II.6) für jedes $\varepsilon > 0$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_n \in \mathrm{Ran}\big[P_{\lambda,1/n}(A)\big]$ mit $\|\varphi_n\| = 1$. Offensichtlich sind dann $\varphi_n \in \mathcal{D}$ und $\varphi_n = P_{\lambda,1/n}(A) \varphi_n$. Also gilt

$$\|(A - \lambda)\varphi_n\| \; = \|(A - \lambda) P_{\lambda,1/n}(A) \varphi_n\| \; \leq \; \|(A - \lambda) P_{\lambda,1/n}(A)\|_{\mathrm{op}} \; \leq \; \frac{1}{n} \; \to \; 0 \, , \tag{II.16}$$

im Limes $n \to \infty$, und daher ist $y \in Y$.

$\underline{Y \subseteq \sigma(A)}$: Ist $\lambda \in Y$, so gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\lim_{n \to \infty} \|(A - \lambda)\varphi_n\| = 0$. Dann ist

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{D} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|(A - \lambda)\varphi\|}{\|\varphi\|} \right\} \; \leq \; \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\big\|(A - \lambda)\varphi_n\big\|}{\|\varphi_n\|} \right\} \; = \; 0 \, , \tag{II.17}$$

und nach Lemma II.2 ist $A - \lambda$ nicht beschränkt invertibel, also $\lambda \in \sigma(A)$. $\square$

II.2. Essenzielles Spektrum und Weyl-Kriterium

Definition II.4. Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert. Dann sind

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(A) \;:=\; \Big\{ \lambda \in \sigma(A) \;\Big|\; \exists\, \varepsilon > 0 : \;\; \dim \mathrm{Ran}\big(\mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon \big] \big) < \infty \Big\} \tag{II.18}$$

das **diskrete Spektrum von $\boldsymbol{A}$** und

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \;:=\; \Big\{ \lambda \in \sigma(A) \;\Big|\; \forall\, \varepsilon > 0 : \;\; \dim \mathrm{Ran}\big(\mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon \big] \big) = \infty \Big\} \tag{II.19}$$

das **essenzielle Spektrum von $\boldsymbol{A}$**.

Satz II.5. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ ein selbstadjungierter Operator. Für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind,*

(i) λ ist ein isolierter Punkt in $\sigma(A)$, d.h. $\mathrm{dist}\big[\lambda\,,\ \sigma(A) \setminus \{\lambda\}\big] > 0$;

(ii) λ ist ein Eigenwert von A endlicher Multiplizität, d.h. $1 \le \dim \mathrm{Ker}\big[A - \lambda\big] < \infty$.

Beweis.
„$\Leftarrow$“: Sind $\varepsilon := \frac{1}{2}\mathrm{dist}\big[\lambda\,,\ \sigma(A) \setminus \{\lambda\}\big] > 0$ und $\dim \mathrm{Ker}\big[A - \lambda\big] =: M < \infty$, so ist

$$\dim \mathrm{Ran}\big\{ \mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon \big] \big\} \;=\; \dim \mathrm{Ker}\big[A - \lambda\big] \;<\; \infty\,. \tag{II.20}$$

„$\Rightarrow$“: Sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$. Wäre λ nicht isoliert, so gäbe es eine Folge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \big(\sigma(A) \setminus \{\lambda\}\big)^{\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \to \lambda$. O.B.d.A. können wir diese Folge als monoton annehmen, etwa $\lambda_n \nearrow \lambda$. Für $n \ge 2$ setzen wir

$$\varepsilon_n \;:=\; \frac{1}{3} \min\big\{ \lambda_n - \lambda_{n-1}\,,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n \big\}\,, \qquad I_n \;:=\; \big(\lambda_n - \varepsilon_n\,,\ \lambda_n + \varepsilon_n \big)\,. \tag{II.21}$$

Die Intervalle I_n sind paarweise disjunkt, und für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n \;\subseteq\; (\lambda_N\,,\ \lambda)\,. \tag{II.22}$$

Da $\lambda_n \in \sigma(A)$ ist $P_{\lambda_n,\varepsilon_n}(A) \neq 0$ und daher auch $\dim\{\mathrm{Ran}\, P_{\lambda_n,\varepsilon_n}(A)\} \ge 1$. Aus der Disjunktheit der I_n und (II.22) folgt daher für jedes $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\dim \mathrm{Ran}\big\{ \mathbb{1}[\lambda_N < A < \lambda] \big\} \;\ge\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \dim \mathrm{Ran}\big\{ P_{\lambda_n,\varepsilon_n}(A) \big\} \;=\; \infty\,. \tag{II.23}$$

Wegen $\lambda_n \to \lambda$ steht dies in Widerspruch zur Existenz eines $\varepsilon > 0$, so dass

$$\dim \mathrm{Ran}\big\{ \mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon \big] \big\} \;<\; \infty\,. \tag{II.24}$$

Also ist $\lambda \in \sigma(A)$ isoliert und es gilt (i).

Zum Beweis von (ii) wählen wir $\varepsilon_1 > 0$ so, dass $\dim \mathrm{Ran}\big\{ \mathbb{1}\big[|A - \lambda| < \varepsilon_1 \big] \big\} < \infty$. Wählen wir weiterhin $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}\mathrm{dist}\big[\lambda\,,\ \sigma(A) \setminus \{\lambda\}\big] > 0$ und $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, so folgt aus $\lambda \in \sigma(A)$, dass $P_{\lambda,\varepsilon} \neq 0$ und deshalb

$$1 \;\le\; \dim \mathrm{Ran}\big\{ P_{\lambda,\varepsilon}(A) \big\} \;=\; \dim \mathrm{Ker}[A - \lambda] \;\le\; \dim \mathrm{Ran}\big\{ P_{\lambda,\varepsilon_1}(A) \big\} \;<\; \infty\,. \tag{II.25}$$

$\square$

Satz II.6 (Weyl-Kriterium)**.** *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ selbstadjungiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$(i) \qquad \lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \tag{II.26}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ii) \quad \exists\, (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \ \|\varphi_n\| = 1 : \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} \{\varphi_n\} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\varphi_n\| = 0; \tag{II.27}$$

$$\Leftrightarrow \quad (iii) \quad \exists\, (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \ \langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn} : \quad \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\varphi_n\| = 0. \tag{II.28}$$

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Wir wählen $\varphi_1 \in \mathrm{Ran} P_{\lambda,1}(A)$ mit $\|\varphi_1\| = 1$. Anschließend wählen wir $\varphi_2 \in \mathrm{Ran} P_{\lambda,\frac{1}{2}}(A)$ mit $\|\varphi_2\| = 1$ und $\varphi_2 \perp \varphi_1$. Letzteres ist möglich, da

$$\dim \mathrm{Ran}\{P_{\lambda,\frac{1}{2}}(A)\} = \infty \geq 2. \tag{II.29}$$

Anschließend wählen wir $\varphi_3 \in \mathrm{Ran}\{P_{\lambda,\frac{1}{3}}(A)\}$ mit $\|\varphi_3\| = 1$ und $\varphi_3 \perp \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$; letzteres wird ermöglicht durch

$$\dim \mathrm{Ran}\{P_{\lambda,\frac{1}{3}}(A)\} = \infty \geq 3, \tag{II.30}$$

usw. Auf diese Weise erhalten wir eine orthonormale Folge $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, $\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$ mit $\varphi_n \in \mathrm{Ran}\{P_{\lambda,\frac{1}{n}}(A)\}$, was

$$\|(A-\lambda)\varphi_n\| = \|(A-\lambda)P_{\lambda,\frac{1}{n}}(A)\varphi_n\| \leq \|(A-\lambda)P_{\lambda,\frac{1}{n}}(A)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{II.31}$$

impliziert.
(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*: Seien $\psi \in \mathfrak{H}$ und $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{H}^{\mathbb{N}}$ ein ONS, d.h., $\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi | \varphi_n \rangle|^2 \leq \|\psi\|^2 < \infty, \tag{II.32}$$

und insbesondere $\lim_{n\to\infty} \langle \psi | \varphi_n \rangle = 0$, also $\varphi_n \to^w 0$.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Offensichtlich impliziert *(ii)*, dass $\lambda \in \sigma(A)$. Um zu zeigen, dass $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ im essenziellen Spektrum liegt, nehmen wir nun das Gegenteil $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ an und zeigen, dass dann *(ii)* nicht gilt. Mit $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ ist dann $\varepsilon := \frac{1}{2}\mathrm{dist}[\lambda\,, \sigma(A) \setminus \{\lambda\}] > 0$, und es gibt eine ONB $\{\psi_1, \ldots, \psi_M\}$ von $\mathrm{Ker}\{A - \lambda\} = \mathrm{Ran}\{P_{\lambda,\varepsilon}(A)\}$, wobei

$$M := \dim \mathrm{Ker}\{A - \lambda\} < \infty. \tag{II.33}$$

Ist nun $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\mathrm{w}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$, so sind $\lim_{n\to\infty} \langle \psi_m | \varphi_n \rangle \to 0$, für alle $1 \leq m \leq M$, und deshalb gilt

$$\langle \varphi_n | P_{\lambda,\varepsilon}(A)\varphi_n \rangle = \sum_{m=1}^{M} \langle \varphi_n | \psi_m \rangle \, \langle \psi_m | \varphi_n \rangle \to 0, \tag{II.34}$$

im Limes $n \to \infty$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda)\varphi_n\|^2 &= \Big\langle (A-\lambda)\varphi_n \,\Big|\, \big\{\big(\mathbb{1} - P_{\lambda,\varepsilon}(A)\big) + P_{\lambda,\varepsilon}(A)\big\}(A-\lambda)\varphi_n \Big\rangle \\ &\geq \varepsilon^2 \,\big\|\big(\mathbb{1} - P_{\lambda,\varepsilon}(A)\big)\varphi_n\big\|^2 \;=\; \varepsilon^2 \Big(1 - \langle \varphi_n | P_{\lambda,\varepsilon}(A)\varphi_n\rangle\Big)\,. \end{aligned} \tag{II.35}$$

Mit (II.34) folgt daraus, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\varphi_n\| \;\geq\; \varepsilon \;>\; 0, \tag{II.36}$$

und (ii) kann nicht gelten. □

II.3. Essenzielles Spektrum und kompakte Operatoren

Definition II.7. Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum. Die Menge $\mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ der **kompakten Operatoren** auf $\mathfrak{H}$ ist definiert als

$$\mathrm{Com}\,(\mathfrak{H}) \;:=\; \overline{\big\{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \;\big|\; \dim \mathrm{Ran} A < \infty\big\}}^{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}}\,, \tag{II.37}$$

d.h. als Normabschluss der Algebra der Operatoren endlichen Ranges.

Bemerkungen und Beispiele.

- $\mathrm{Com}(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist eine echte Teilalgebra, $\mathrm{Com}(\mathfrak{H}) \neq \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, falls $\dim \mathfrak{H} = \infty$. So ist beispielsweise $\mathbb{1} \notin \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$.
- $\mathrm{Com}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist ein zweiseitiges Ideal, d.h.

$$\forall\, K \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H}),\; A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}): \quad KA,\; AK \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})\,. \tag{II.38}$$

Lemma II.8. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, $K \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ kompakt und $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{H}^{\mathbb{N}}$, mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $w\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$. Dann konvergiert $\lim_{n\to\infty} \|K\varphi_n\| = 0$.*

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es einen Operator endlichen Ranges

$$A \;=\; \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|\,, \tag{II.39}$$

$N \leq \dim \mathrm{Ran} A < \infty$, so, dass $\|K - A\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon$. Mit $\mathrm{w}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \langle \psi_j | \varphi_n\rangle \to 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}_1^N$. Also ist $\lim_{n\to\infty} \|A\varphi_n\| = 0$ und daher auch

$$\limsup_{n\to\infty} \|K\varphi_n\| \;\leq\; \varepsilon + \limsup_{n\to\infty} \|A\varphi_n\| \;=\; \varepsilon\,. \tag{II.40}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt aus (II.40) auch $\lim_{n\to\infty} \|K\varphi_n\| = 0$. □

Satz II.9. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $(A, \mathcal{D})$, $(B, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zwei selbstadjungierte Operatoren. Ist $A - B \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ kompakt, so gilt*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \;=\; \sigma_{\mathrm{ess}}(B). \tag{II.41}$$

Beweis. Seien $K := A - B \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ und $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Nach Satz II.6 gibt es dann $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ so, dass $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\varphi_n\| = 0$. Dann gilt jedoch auch

$$\|(B-\lambda)\varphi_n\| \;=\; \|(A-\lambda-K)\varphi_n\| \;\le\; \|(A-\lambda)\varphi_n\| + \|K\varphi_n\| \;\overset{n\to\infty}{\to}\; 0, \tag{II.42}$$

nach Lemma II.8. Abermals impliziert Satz II.6, dass $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$. Es folgt, dass $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$, und durch Vertauschen der Rollen von A und B folgt genauso $\sigma_{\mathrm{ess}}(B) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. ☐

Satz II.10. *Seien $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum, $(A, \mathcal{D})$, $(B, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$ zwei selbstadjungierte Operatoren. Existiert ein $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ so, dass die Differenz $(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1} \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ der Resolventen von A und B zu z kompakt ist, so ist*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) \;=\; \sigma_{\mathrm{ess}}(B)\,. \tag{II.43}$$

Beweis. Seien wieder $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ und $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ so, dass $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\varphi_n\| = 0$. Ist weiterhin $z \in \rho(A)\cap\rho(B)$ so, dass $M := (A-z)^{-1} - (B-z)^{-1} \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$ kompakt ist, so beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} (B-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1} \;&=\; -M + (A-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1} \\ &=\; -M + (\lambda-z)^{-1}(A-z)^{-1}(A-\lambda)\,. \end{aligned} \tag{II.44}$$

Wenden wir dies auf φ_n an, so folgt mit $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ und $M \in \mathrm{Com}(\mathfrak{H})$, dass $\lim_{n\to\infty} \|M\varphi_n\| = 0$ und daher

$$\big\|(B-z)^{-1}\varphi_n - (\lambda-z)^{-1}\varphi_n\big\| \;\le\; \|M\varphi_n\| \;+\; |\lambda-z|^{-1}\,\big\|(A-z)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}}\,\|(A-\lambda)\varphi_n\| \;\to\; 0, \tag{II.45}$$

für $n \to \infty$. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \ge N: \quad \frac{1}{2|\lambda-z|} \;\le\; \big\|(B-z)^{-1}\varphi_n\big\| \;\le\; \frac{2}{|\lambda-z|}\,. \tag{II.46}$$

Wir definieren nun

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \tilde{\psi}_n \;:=\; (B-z)^{-1}\varphi_{N+n}\,, \quad \psi_n \;:=\; \frac{\tilde{\psi}_n}{\|\tilde{\psi}_n\|}. \tag{II.47}$$

Dann ist offensichtlich $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ und $\|\psi_n\| = 1$. Außerdem ist für jedes $\varphi \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \big|\langle\varphi|\psi_n\rangle\big| \;&\le 2|\lambda-z|\;\lim_{n\to\infty} \big|\big\langle\varphi\,\big|\,(B-z)^{-1}\varphi_{n+N}\big\rangle\big| \\ &= 2|\lambda-z|\;\lim_{n\to\infty} \big|\big\langle(B-\overline{z})^{-1}\varphi\,\big|\,\varphi_{n+N}\big\rangle\big| \;=\; 0\,, \end{aligned} \tag{II.48}$$

da $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$. Also gilt auch $\text{w-}\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} (B-\lambda) - (A-\lambda) \;&= (B-z) - (A-z) \;=\; (B-z)\big\{(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1}\big\}(A-z) \\ &= (B-z)\,M\,\big\{(\lambda-z) + (A-\lambda)\big\}\,, \end{aligned} \tag{II.49}$$

bzw.

$$(B-z)^{-1}\,(B-\lambda) \;=\; (B-z)^{-1}(A-\lambda) \;+\; (\lambda-z)\,M \;+\; M\,(A-\lambda)\,. \tag{II.50}$$

Auf φ_{n+N} angewandt, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}(B-\lambda)\tilde{\psi}_n \;&= (B-z)^{-1}\,(B-\lambda)\varphi_{n+N} \\ &= (B-z)^{-1}(A-\lambda)\varphi_{n+N} \;+\; (\lambda-z)\,M\varphi_{n+N} \;+\; M\,(A-\lambda)\varphi_{n+N}\,.\end{aligned} \tag{II.51}$$

Mit $\lim_{n\to\infty}\|M\varphi_n\| = \lim_{n\to\infty}\|(A-\lambda)\varphi_n\| = 0$ folgt daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty}\|(B-\lambda)\tilde{\psi}_n\| \;=\; 0\,. \tag{II.52}$$

Also ist auch

$$\lim_{n\to\infty}\|(B-\lambda)\psi_n\| \;\leq\; 2|\lambda-z|\,\lim_{n\to\infty}\|(B-\lambda)\tilde{\psi}_n\| \;=\; 0\,. \tag{II.53}$$

Somit gilt $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(B)$ und also $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)\subseteq\sigma_{\mathrm{ess}}(B)$. Durch Vertauschen der Rollen von A und B ergibt sich die umgekehrte Inklusion $\sigma_{\mathrm{ess}}(B)\subseteq\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. $\square$