

# I. Selbstadjungiertheit und Spektralsatz

Wir beginnen ganz am Anfang und rufen einige uns aus der Anfängervorlesung zur linearen Algebra bekannten Fakten in Erinnerung:

Seien  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$  der mit dem unitären Skalarprodukt  $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{n=1}^N \overline{\varphi_n} \psi_n$  ausgestattete  $N$ -dimensionale komplexe Hilbert-Raum und  $H = (H_{k,\ell})_{k,\ell=1}^N = H^* \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$  eine selbstadjungierte komplexe  $N \times N$ -Matrix, also  $H_{\ell,k} = \overline{H_{k,\ell}}$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subseteq \mathbb{C}^N$  aus Eigenvektoren von  $H$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_j$ , die alle reell sind, also

$$\forall k, j \in \mathbb{Z}_1^N : \quad \langle \varphi_k | \varphi_j \rangle = \delta_{k,j}, \quad [H\varphi]_j = \lambda_j \varphi_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.1})$$

Damit wird

$$H = \sum_{j=1}^N \lambda_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|, \quad (\text{I.2})$$

wobei  $|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$  die orthogonale Projektion auf  $\varphi_j$  notiert.

Ist  $p \in \mathbb{C}[x]$  ein komplexes Polynom der Form  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_M x^M$ , so ist  $p(H) \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$  definiert durch

$$p(H) = \alpha_0 + \alpha_1 H + \alpha_2 H^2 + \dots + \alpha_M H^M. \quad (\text{I.3})$$

Ein *Funktionalkalkül* ist eine Vorschrift, mit der sich (I.3) für bestimmte Klassen von linearen Operatoren auf allgemeinere Funktionen, die eine geringere Regularität als Polynome besitzen, fortsetzen lässt. Die große Bedeutung selbstadjungierter Matrizen und allgemeiner selbstadjungierter Operatoren liegt in dem für sie gültigen *Spektralsatz*, der eine sinnvolle Definition von  $f(H)$  erlaubt, wenn  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  auch nur (Lebesgue-)messbar und beschränkt ist. Im Falle, dass  $H$  die obige selbstadjungierte  $N \times N$ -Matrix ist, ist dieser Funktionalkalkül durch

$$f(H) := \sum_{j=1}^N f(\lambda_j) |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \quad (\text{I.4})$$

definiert. Wählen wir beispielsweise  $f(\lambda) := e^{-it\lambda}$ , so erhalten wir die Matrixexponentialfunktion,

$$\exp(-itH) = \sum_{j=1}^N e^{-it\lambda_j} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|, \quad (\text{I.5})$$

## I. Selbstdjungiertheit und Spektralsatz

und es ist eine sinnvolle Übungsaufgabe zu zeigen, dass (I.5) mit der uns aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Definition  $e^{-itH} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-it)^k}{k!} H^k$  übereinstimmt.

Tatsächlich ist (I.1)-(I.3) eine Form des Spektralsatzes, den wir nun in einer anderen Form präsentieren. Wir setzen  $\Lambda_{k,j} := \langle e_k | \varphi_j \rangle = [\varphi_j]_k$ , wobei  $[e_k]_\ell := \delta_{k,\ell}$  der  $k$ . kanonische Basisvektor in  $\mathbb{C}^N$  ist. Wir beobachten, dass  $\Lambda \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$  unitär ist, denn für alle  $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}_1^N$  sind

$$(\Lambda^* \Lambda)_{i,j} = \sum_{k=1}^N \overline{\Lambda_{k,i}} \Lambda_{k,j} = \sum_{n=1}^N \overline{[\varphi_i]_n} [\varphi_j]_n = \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad (\text{I.6})$$

$$(\Lambda \Lambda^*)_{k,\ell} = \sum_{j=1}^N \Lambda_{k,j} \overline{\Lambda_{\ell,j}} = \sum_{j=1}^N [\varphi_j]_k \overline{[\varphi_j]_\ell} = \left( \sum_{j=1}^N |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j| \right)_{k,\ell} = \delta_{k,\ell}. \quad (\text{I.7})$$

Nach unitärer Transformation  $\Lambda : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  wird dann also

$$(\Lambda^* H \Lambda)_{k,\ell} = \delta_{k,\ell} \lambda_\ell, \quad (\text{I.8})$$

für alle  $k, \ell \in \mathbb{Z}_1^N$ .

### I.1. Selbstdjungierte lineare Operatoren

Die obigen Beobachtungen lassen sich auf selbstdjungierte Operatoren  $H$ , die auf (dichten Unterräumen von) separablen komplexen Hilberträumen  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  definiert sind, verallgemeinern. Um dies präzise zu formulieren, brauchen wir noch einige zusätzliche Definitionen.

**Definition I.1.** Sei  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum.

(i) Ein Paar  $(A, \mathcal{D})$  heißt **linearer Operator auf  $\mathfrak{H}$**   $:\Leftrightarrow$

$$\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H} \text{ ist ein Unterraum, und } A : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{H} \text{ ist linear.} \quad (\text{I.9})$$

In diesem Fall schreiben wir  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  und  $\text{dom}(A) := \mathcal{D}$ .

(ii) Ein linearer Operator  $(A, \text{dom}(A)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  heißt **dicht definiert**  $:\Leftrightarrow$

$$\text{dom}(A) \subseteq \mathfrak{H} \text{ ist dicht (bezüglich } \langle \cdot | \cdot \rangle \text{)}. \quad (\text{I.10})$$

(iii) Seien  $(A, \text{dom}(A)), (B, \text{dom}(B)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  lineare Operatoren. Der Operator  $(B, \text{dom}(B))$  heißt **Fortsetzung von  $(A, \text{dom}(A))$**   $:\Leftrightarrow$

$$\text{dom}(A) \subseteq \text{dom}(B) \quad \text{und} \quad A = B|_{\text{dom}(A)}, \quad (\text{I.11})$$

und in diesem Fall schreiben wir  $(A, \text{dom}(A)) \subseteq (B, \text{dom}(B))$ .

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Sind  $\mathfrak{H} := L^2(\mathbb{R})$ ,  $A := \frac{d^k}{dx^k}$ , und  $\text{dom}(A) := C_0^\infty(\mathbb{R})$ , so ist  $\text{dom}(A) \subseteq L^2(\mathbb{R})$  ein dichter Teilraum und  $\frac{d^k}{dx^k} : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Also ist  $(\frac{d^k}{dx^k}, C_0^\infty(\mathbb{R})) \in \mathfrak{L}[L^2(\mathbb{R})]$  dicht definiert.

## I. Selbstdjungiertheit und Spektralsatz

- Ist  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{H}})$  ein komplexer Hilbert-Raum, so ist auch  $(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}})$  ein komplexer Hilbert-Raum, wobei

$$\langle \psi_1 \oplus \psi_2 | \varphi_1 \oplus \varphi_2 \rangle_{\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}} := \langle \psi_1 | \varphi_1 \rangle_{\mathfrak{H}} + \langle \psi_2 | \varphi_2 \rangle_{\mathfrak{H}}. \quad (\text{I.12})$$

**Definition I.2.** Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein linearer Operator auf  $\mathfrak{H}$ .

- (i) Als **Graph von  $(A, \mathcal{D})$**  bezeichnen wir die Menge

$$\mathcal{G}(A, \mathcal{D}) := \left\{ \psi \oplus A\psi \mid \psi \in \mathcal{D} \right\} \subseteq \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}. \quad (\text{I.13})$$

- (ii) Ist  $\mathcal{G}(A, \mathcal{D}) \subseteq \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$  abgeschlossen, so nennt man  $(A, \mathcal{D})$  **abgeschlossen**.

- (iii) Gibt es eine Fortsetzung  $(A', \mathcal{D}') \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  von  $(A, \mathcal{D})$ , so dass

$$\mathcal{G}(A', \mathcal{D}') = \overline{\mathcal{G}(A, \mathcal{D})}, \quad (\text{I.14})$$

so heißen  $(A, \mathcal{D})$  **abschließbar** und  $(A', \mathcal{D}')$  **Abschluss von  $(A, \mathcal{D})$** .

**Definition I.3.** Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter linearer Operator auf  $\mathfrak{H}$ . Wir definieren

$$\mathcal{D}^* \equiv \text{dom}(A^*) := \left\{ \psi \in \mathfrak{H} \mid \exists \tilde{\psi} \in \mathfrak{H} \forall \varphi \in \mathcal{D} : \langle \psi | A\varphi \rangle = \langle \tilde{\psi} | \varphi \rangle \right\}, \quad (\text{I.15})$$

und für  $\psi \in \mathcal{D}^*$  und  $\tilde{\psi} \in \mathfrak{H}$  mit  $\langle \psi | A\varphi \rangle = \langle \tilde{\psi} | \varphi \rangle$ , für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ , definieren wir  $A^* : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathfrak{H}$  durch

$$A^*\psi := \tilde{\psi}. \quad (\text{I.16})$$

$(A^*, \mathcal{D}^*) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  heißt der zu  $(A, \mathcal{D})$  **adjungierte Operator**.

### Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildung  $\psi \mapsto A^*\psi = \tilde{\psi}$  ist wohldefiniert, d.h.  $\tilde{\psi}$  ist durch

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \quad \langle \psi | A\varphi \rangle = \langle \tilde{\psi} | \varphi \rangle \quad (\text{I.17})$$

eindeutig bestimmt. Gilt nämlich (I.17) auch für  $\psi'$ , so ist

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \quad \langle \tilde{\psi} - \psi' | \varphi \rangle = \langle \psi | A\varphi \rangle - \langle \psi | A\varphi \rangle = 0, \quad (\text{I.18})$$

und aus der Dichtheit von  $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{H}$  folgt dann  $\tilde{\psi} = \psi'$ .

- Offensichtlich folgt aus der Eindeutigkeit auch die Linearität von  $A^*$ . Sind nämlich  $\psi, \psi' \in \mathcal{D}^*$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$ :

$$\langle \psi + \lambda\psi' | A\varphi \rangle = \langle \psi | A\varphi \rangle + \bar{\lambda} \langle \psi' | A\varphi \rangle = \langle A^*\psi | \varphi \rangle + \bar{\lambda} \langle A^*\psi' | \varphi \rangle = \langle A^*\psi + \lambda A^*\psi' | \varphi \rangle. \quad (\text{I.19})$$

Also ist  $\psi + \lambda\psi' \in \mathcal{D}^*$  und  $A^*(\psi + \lambda\psi') = A^*\psi + \lambda A^*\psi'$ .

## I. Selbstadjungiertheit und Spektralsatz

**Definition I.4.** Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter linearer Operator.

(i)  $(A, \mathcal{D})$  heißt **symmetrisch**

$$:\Leftrightarrow \mathcal{D}^* \supseteq \mathcal{D}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D} : \langle \varphi | A\psi \rangle = \langle A\varphi | \psi \rangle \quad (\text{I.20})$$

$$\Leftrightarrow (A^*, \mathcal{D}^*) \supseteq (A, \mathcal{D}), \quad (\text{I.21})$$

d.h.  $(A^*, \mathcal{D}^*)$  ist eine Fortsetzung von  $(A, \mathcal{D})$ .

(ii)  $(A, \mathcal{D})$  heißt **selbstadjungiert**

$$:\Leftrightarrow (A^*, \mathcal{D}^*) = (A, \mathcal{D}). \quad (\text{I.22})$$

(iii)  $(A, \mathcal{D})$  heißt **wesentlich selbstadjungiert**  $:\Leftrightarrow$

$$(A, \mathcal{D}) \text{ ist abschließbar, und der Abschluss von } (A, \mathcal{D}) \text{ ist selbstadjungiert.} \quad (\text{I.23})$$

In diesem Fall nennt man  $\mathcal{D}$  einen **determinierenden Bereich für  $(A, \mathcal{D})$** .

**Lemma I.5.** Seien  $\mathfrak{H}$  ein Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  dicht definiert. Dann gelten folgende Aussagen:

(i)  $(A^*, \mathcal{D}^*) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ist abgeschlossen;

(ii)  $(A, \mathcal{D})$  ist abschließbar  $\Leftrightarrow \mathcal{D}^* \subseteq \mathfrak{H}$  ist dicht;

(iii) Ist  $(A, \mathcal{D})$  abschließbar, so ist sein Abschluss gleich  $(A^{**}, \mathcal{D}^{**})$ .

(iv) Es gelten

$$\text{Ker}(A^*) = \text{Ran}(A)^\perp \quad \text{und} \quad \text{Ker}(A^*)^\perp = \overline{\text{Ran}(A)}; \quad (\text{I.24})$$

(v) Ist  $(A, \mathcal{D})$  symmetrisch, so ist  $(A, \mathcal{D})$  abschließbar und

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathcal{D} : \|(A - \lambda)\varphi\| \geq |\text{Im}(\lambda)| \cdot \|\varphi\|. \quad (\text{I.25})$$

**Definition I.6.** Sei  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum. Eine Familie  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{H})$  beschränkter Operatoren auf  $\mathfrak{H}$  heißt  **$C_0$ -Gruppe**  $\Leftrightarrow$ :

$$\forall t, s \in \mathbb{R} : T(t)T(s) = T(t + s); \quad (\text{I.26})$$

$$T(0) = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}; \quad (\text{I.27})$$

$$t \mapsto T(t) \text{ ist stark stetig auf } \mathfrak{H}. \quad (\text{I.28})$$

Dabei bedeutet (I.28), dass  $(t \mapsto T(t)\varphi) \in C(\mathbb{R}; \mathfrak{H})$ , für jedes  $\varphi \in \mathfrak{H}$ .

**Satz I.7** (Stone für selbstadjungierte Operatoren). Seien  $\mathfrak{H}$  ein Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter abgeschlossener Operator auf  $\mathfrak{H}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

## I. Selbstadjungiertheit und Spektralsatz

- (i)  $(A, \mathcal{D})$  ist selbstadjungiert;
- (ii)  $(A, \mathcal{D})$  ist symmetrisch und für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ist  $\text{Ran}(A - \lambda) = \mathfrak{H}$ ;
- (iii)  $(A, \mathcal{D})$  ist symmetrisch und es existieren  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R} \pm i\mathbb{R}^+$  so, dass  $\text{Ran}(A - \lambda_{\pm}) = \mathfrak{H}$ ;
- (iv)  $(A, \mathcal{D})$  erzeugt eine  $C_0$ -Gruppe  $\{e^{-itA}\}_{t \in \mathbb{R}}$  unitärer Operatoren.

**Satz I.8** (Stone für wesentlich selbstadjungierte Operatoren). *Seien  $\mathfrak{H}$  ein Hilbert-Raum und  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter abschließbarer Operator auf  $\mathfrak{H}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $(A, \mathcal{D})$  ist wesentlich selbstadjungiert;
- (ii)  $(A, \mathcal{D})$  ist symmetrisch und für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ist  $\overline{\text{Ran}(A - \lambda)} = \mathfrak{H}$ ;
- (iii)  $(A, \mathcal{D})$  ist symmetrisch und es existieren  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R} \pm i\mathbb{R}^+$  so, dass  $\overline{\text{Ran}(A - \lambda_{\pm})} = \mathfrak{H}$ ;
- (iv) Der Abschluss  $(\overline{A}, \overline{\mathcal{D}})$  erzeugt eine  $C_0$ -Gruppe  $\{e^{-it\overline{A}}\}_{t \in \mathbb{R}}$  unitärer Operatoren.

Selbstadjungiertheit ist also eine zentrale Eigenschaft für die Konzeption der Quantenphysik. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es überhaupt selbstadjungierte Operatoren gibt.

**Satz I.9.** *Seien  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}_1)$  reell-messbar und  $\mu$ -f.ü. endlich. Seien weiterhin  $\mathfrak{H} := L^2(\Omega)$ ,*

$$\mathcal{D} := \{ \varphi \in \mathfrak{H} \mid f\varphi \in \mathfrak{H} \} \quad (\text{I.29})$$

und  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{H}$  definiert als **Multiplikationsoperator** durch,

$$\forall \omega \in \Omega : [A\varphi](\omega) := f(\omega) \cdot \varphi(\omega). \quad (\text{I.30})$$

Dann ist  $(A, \mathcal{D}) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  selbstadjungiert und das Spektrum von  $A$  ist gegeben durch

$$\sigma(A) = \text{ess Ran}(f) := \bigcap \left\{ f(\Omega') \mid \Omega' \in \mathfrak{A}, \mu(\Omega \setminus \Omega') = 0 \right\}. \quad (\text{I.31})$$

## I.2. Spektralsatz und Funktionalkalkül

Nach diesen viele neuen Begriffen können wir den *Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren* formulieren, der von zentraler Bedeutung in Mathematik und Physik ist - vor allem in der Quantenphysik.

**Satz I.10** (Spektralsatz). *Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum und  $(H, \mathcal{D}) = (H^*, \mathcal{D}^*) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter, selbstadjungierter Operator auf  $\mathfrak{H}$ . Dann gibt es einen Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ , eine messbare Abbildung  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und eine unitäre Transformation  $\Lambda : \mathfrak{H} \rightarrow L^2(\Omega)$  so, dass*

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \omega \in \Omega : [\Lambda H \Lambda^* \varphi](\omega) = h(\omega) \varphi(\omega) \quad (\text{I.32})$$

und dass der Wertebereich  $h(\Omega) = \sigma(H)$  gleich dem Spektrum  $\sigma(H)$  von  $H$  ist, d.h. gleich der Menge aller komplexer Zahlen  $z \in \mathbb{C}$ , für die  $H - z$  nicht beschränkt invertibel ist.

**Bemerkungen und Beispiele.**

- Der Spektralsatz I.10 ist offensichtlich enorm wichtig und wir empfehlen das Nachvollziehen seines Beweis. Tatsächlich gibt es mehrere, zueinander äquivalente Formulierungen; welche man davon bevorzugt, ist ein stückweit Geschmackssache. Darstellungen des Spektralsatzes (auch für unbeschränkte Operatoren!) inklusive seines Beweises findet man beispielsweise in [?, Kap. VI-VIII], [?, Kap. 12-13], [?, Kap. XI] und [?].
- Der Spektralsatz I.10 verallgemeinert (I.8) und besagt, dass  $H$  nach geeigneter unitärer Transformation als Multiplikationsoperator wirkt. Ein Multiplikationsoperator wie in (I.32) ist also die natürliche Verallgemeinerung einer Diagonalmatrix.
- Im obigen Spezialfall (I.8) sind  $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^N$ ,  $\Omega = \mathbb{Z}_1^N$ ,  $L^2(\Omega) = \ell^2(\mathbb{Z}_1^N) = \mathbb{C}^N$ ,  $\Lambda_{x,j} = \langle \delta_x | \varphi_j \rangle = \varphi_j(x)$  und (I.32) ist (I.8).
- Wir bemerken ohne Begründung dass für  $d \in \mathbb{N}$  und  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$  der Laplace-Operator  $(-\Delta_x, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  wesentlich selbstdjungiert ist. Somit ist  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  ein determinierender Bereich für  $-\Delta$ .
- Sein Abschluss  $\overline{(-\Delta_x, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))} = (-\Delta_x, H^2(\mathbb{R}^d)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ist selbstdjungiert, wobei  $H^2(\mathbb{R}^d)$  den Sobolev-Raum zweiter Ordnung notiert. Dieser enthält alle zweimal schwach differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit ihren partiellen Ableitungen bis zum Grad zwei quadratintegrabel sind. Auch dies beweisen wir nicht.
- Für  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(-\Delta_x, H^2(\mathbb{R}^d)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  setzen wir  $\Omega = \mathbb{R}^d$  mit dem üblichen Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$ . Weiterhin seien  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(k) := k^2$  und  $\Lambda := \mathfrak{F}$  die  $d$ -dimensionale Fouriertransformation,

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), k \in \mathbb{R}^d : \quad [\mathfrak{F}\psi](k) := \int e^{-ik \cdot x} \psi(x) \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}}, \quad (\text{I.33})$$

wobei  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  die Schwartzschen Testfunktionen notiert. Dann ist  $\mathfrak{F}[\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)] \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , und nach dem Satz von Plancherel gilt  $\|\mathfrak{F}\psi\|_{L^2} = \|\psi\|_{L^2}$ . Daraus gewinnt man leicht, dass sich die Fouriertransformation zu einer unitären Abbildung  $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  stetig fortsetzen lässt. Für  $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  nimmt (I.32) dann die Gestalt

$$\forall k \in \mathbb{R}^d : \quad [\mathfrak{F} \circ H \circ \mathfrak{F}^* \hat{\psi}](k) = k^2 \hat{\psi}(k) \quad (\text{I.34})$$

an.

Aus dem Spektralsatz I.10 ergibt sich –wie oben schon gesagt– unmittelbar ein Funktionalkalkül.

**Definition I.11** (Funktionalkalkül). Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum,  $(H, \mathcal{D}) = (H^*, \text{dom}(H^*)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter, selbstdjungierter Operator auf  $\mathfrak{H}$  und  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  der Maßraum,  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die messbare Abbildung und  $\Lambda : \mathfrak{H} \rightarrow L^2(\Omega)$  die unitäre Transformation aus Satz I.10, sodass

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \omega \in \Omega : \quad [\Lambda H \Lambda^* \varphi](\omega) = h(\omega) \varphi(\omega). \quad (\text{I.35})$$

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  reell-messbar und beschränkt, so definieren wir einen beschränkten linearen Operator  $\mathbf{f}(H) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$  durch

$$f(H) := \Lambda^* f(\Lambda H \Lambda^*) \Lambda, \quad (\text{I.36})$$

## I. Selbstadjungiertheit und Spektralsatz

d.h.

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \omega \in \Omega : [\Lambda f(H) \Lambda^* \varphi](\omega) := f[h(\omega)] \varphi(\omega). \quad (\text{I.37})$$

### Bemerkungen und Beispiele.

- Sind  $H = H^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator und  $p \in \mathbb{C}[x]$  ein komplexes Polynom der Form  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_M x^M$ , so ist  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zwar nicht beschränkt, aber der Funktionalkalkül (I.36) ergibt bei seiner Anwendung genau das gewünschte Resultat, nämlich

$$\begin{aligned} p(H) &= \Lambda^* p(\Lambda H \Lambda^*) \Lambda = \Lambda^* \left( \sum_{m=0}^M \alpha_m (\Lambda H \Lambda^*)^m \right) \Lambda & (\text{I.38}) \\ &= \sum_{m=0}^M \alpha_m \Lambda^* \underbrace{\Lambda H \Lambda^* \dots \Lambda H \Lambda^*}_m \Lambda = \sum_{m=0}^M \alpha_m H^m. \end{aligned}$$

Eine erste Anwendung des Spektralsatzes in Verbindung mit dem Funktionalkalkül ist folgendes Korollar.

**Korollar I.12.** *Seien  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein separabler komplexer Hilbert-Raum,  $(H, \mathcal{D}) = (H^*, \text{dom}(H^*)) \in \mathfrak{L}[\mathfrak{H}]$  ein dicht definierter, selbstadjungierter Operator auf  $\mathfrak{H}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reell-messbare und beschränkte Funktion. Dann ist*

$$\|f(H)\|_{\text{op}} = \sup_{\lambda \in \sigma(H)} \{|f(\lambda)|\}, \quad (\text{I.39})$$

wobei  $\| \cdot \|_{\text{op}} := \| \cdot \|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})}$  die Operatornorm auf  $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$  bezeichnet.