



10. Übungsblatt

Ausgabe: 18.06.2026

Abgabe: 25.06.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung

”Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX”

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 10.1 (1+1+1+2 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils begründet, ob die folgenden Funktionen absolut integrabel sind und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert des uneigentlichen Integrals.

$$(a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|} \cos(x) \quad (b) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\mathbf{1}_{(0,1)}(x)}{x}$$

$$(c) h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)}{x} \quad (d) l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

Aufgabe 10.2 (5 Punkte)

Es sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$ seien zwei äquivalente Normen auf X . Zeigen Sie, dass für alle $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert in } (X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert in } (X, \|\cdot\|_*).$$

Bemerkung: Siehe GÜ 8.4 für die Definition von äquivalenten Normen.

Aufgabe 10.3 (1+2+2 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } [a, b]\}.$$

- (a) Begründen Sie kurz, warum es sich bei $\mathcal{C}[a, b]$ um einen Vektorraum bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation handelt.
- (b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

eine Norm auf $\mathcal{C}[a, b]$ gegeben ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an HA 9.4.a.

- (c) Zeigen Sie, dass durch

$$(f_n)_{n=1}^\infty \in (\mathcal{C}[0, 1])^\mathbb{N}, \quad f_n(x) := \frac{1}{1 + e^{-nx}}$$

eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$ gegeben ist.

Aufgabe 10.4 (2+2+1 Punkte)

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Nach GÜ 8.2 sind durch

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d : \begin{cases} \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d|, \\ \|x\|_2 := (|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} \{|x_i|\} \end{cases}$$

drei Normen auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^d gegeben.

- (a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\} & S_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \\ S_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\} & S_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1/2\} \end{aligned}$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf \mathbb{R}^d paarweise äquivalent sind.
- (c) Zeigen Sie, dass

$$(x^{(n)})_{n=1}^\infty \in (\mathbb{R}^3)^\mathbb{N}, \quad x^{(n)} := \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{n}) \\ \frac{n^2 + \sin(n)}{4n^2 + n} \\ ne^{-n} \end{pmatrix}$$

eine konvergente Folge in $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 10.5 (4 Bonuspunkte) (Partielle Differentialgleichungen)

Eine Koaxialleitung hat einen Innenleiter mit einem Radius von 10 mm und einen Außenleiter mit einem Radius von 50 mm. Zwischen den Leitern befindet sich ein festes Dielektrikum. Der Außenleiter hat das Bezugspotential von $\varphi_2 = 0 \text{ V}$. Die Potentialdifferenz oder Spannung zwischen Innen- und Außenleiter beträgt $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 500 \text{ V}$. Die Potentialgleichung im Dielektrikum ergibt sich aus der Lösung eines partiellen Differentialgleichungssystems in Polarkoordinaten zu $\varphi(r) = k \cdot \ln(r)$. Zahlenwertergebnisse sind auf eine Nachkommastelle zu runden.

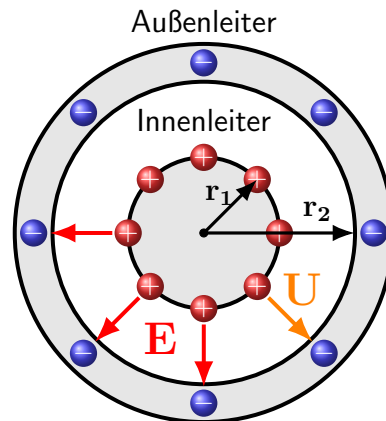


Abbildung 1: Schnittdarstellung der Koaxialleitung

- Stellen Sie bitte die Gleichung auf für die Konstante k aus der Potentialdifferenz.
- Bestimmen Sie die Gleichung für den Feldstärkevektor $\vec{E} = -\nabla\varphi$ mit $\varphi = k \cdot \ln(r)$ in Polarkoordinaten für den Innenraum der Koaxialleitung.
- Berechnen Sie bitte den maximalen Feldstärkewert in Polarkoordinaten für den Innenraum der Koaxialleitung.
- Beschreiben Sie den Winkel zwischen den Feldstärkevektor und der Oberfläche des Innenleiters und begründen Sie diesen Winkel.