Analysis für Elektrotechnik
Sommersemester 2026
Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

9. Übungsblatt

Ausgabe: 11.06.2026

Abgabe: 18.06.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 9.1 (2+3 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sind $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\widetilde{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f, so gilt

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \ \forall\, x \in [a, b] : \quad F(x) - \widetilde{F}(x) \ = \ c\,.$$

(b) Ist f zusätzlich auf $[a, b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ (b - a) f(x_0)\,.$$

Aufgabe 9.2 (1+1,5+1,5+1 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{-2x} + \cos(-\pi x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} |\sin(x)|\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^{12} - 3x^7 - x + 10\, dx$

Aufgabe 9.3 (1+1,5+1+1,5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels (möglicherweise mehrfacher) partieller Integration und/oder Variablensubstitution.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{s} \ln(x)\, dx\,, \quad s \ > \ 1$

(c) $\displaystyle\int_{4}^{5} (x-4)^{42}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$

Aufgabe 9.4 (2,5+2,5 Punkte)

(a) Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \;=\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe HA 6.2.

(b) Geben Sie eine Folge von stetigen Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{R}[0,1])^{\mathbb{N}}$ so an, dass

$$\forall x \in [0,1]: \quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

aber

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Aufgabe 9.5 (4 Bonuspunkte) (Wärmeleitungsgleichung mit Finiten Differenzen)

Ein runder Metallstab der Länge $\ell = 100\,\mathrm{cm}$ und der Querschnittsfläche $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ soll für die Berechnung in 4 Rechengebiete unterteilt werden. An einem Ende ($x_0 = 0\,\mathrm{cm}$) befindet sich der Stab auf einer konstanten Temperatur $T_0 = 500\,\mathrm{K}$, während das andere Ende x_4 auf Umgebungstemperatur $T_4 = 300\,\mathrm{K}$ gehalten wird. Die Wärmeleitungsgleichung für den hier vorliegenden eindimensionalen Fall lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{1}$$

Der Stab wird durch vier gleichlange Teilabschnitte Δx diskretisiert, sodass zwischen den Endpunkten $x_0 = 0\,\mathrm{cm}$ und $x_4 = 100\,\mathrm{cm}$ drei weitere Gitterpunkte x_1 bis x_3 entstehen.

a) Skizzieren Sie den Stab mit seiner Diskretisierung und nummerieren Sie die Gitterpunkte.

b) Leiten Sie aus der Taylorformel für $n = 4$ die Differenzengleichung her und vernachlässigen Sie die Restglieder.

c) Schreiben Sie die Differenzengleichungen für die Gitterpunkte 1 bis 3 auf.

d) Lösen Sie die Gleichungen für die Gitterpunkte 1 bis 3 und berechnen Sie Temperaturen.

Hinweis: Dies ist ein iteratives Verfahren. Nehmen Sie daher in jeder Gleichung für die beiden Nachbarpunkte 0 und 4 die bekannten Temperaturen an. Für unbekannte Werte setzen Sie die Umgebungstemperatur mit $T = 300\,\mathrm{K}$ an. Starten Sie mit der Berechnung von T_1 und setzen Sie die bereits berechneten Werte in T_2 und T_3 ein.