Technische Universität Braunschweig

8. Übungsblatt

Ausgabe: 04.06.2026

Abgabe: 11.06.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 8.1 (1+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Taylorpolynome und Restglieder.

(a) $T_1[f,1;x]$ und $R_2[f,1;x]$ für

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{x}{1+x}$$

und $x\in(0,\infty)$, $x\neq 1$.

(b) $T_4[g,0;x]$ und $R_5[g,0;x]$ für

$$g:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\ln(1+x)$$

und $x\in(-1,\infty)$, $x\neq 0$.

(c) $T_{41}[p,2;x]$ und $R_{42}[p,2;x]$ für

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^3+2x-7$$

und $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 2$.

Bemerkung: Bei der Bestimmung der Restglieder müssen Sie die Zwischenstelle x' nicht explizit angeben.

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie $c_0,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ so, dass

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad \left|\sqrt{1+x^2}-c_0-c_1x-c_2x^2\right| \;\leq\; c_3|x|^3\,.$$

Aufgabe 8.3 (1+2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Kosinusfunktion, geben durch die Potenzreihe

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\,,$$

beliebig oft auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kosinus mit seiner Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ übereinstimmt,

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \{T_n[\cos, 0; x]\} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ dennoch

$$\forall n \geq 2 : \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ |\cos(x) - T_n[\cos, x_0; x]| \right\} \;=\; \infty$$

gilt.

Hinweis: Es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) = \sin(x) = 0$.

Aufgabe 8.4 (3+2 Punkte)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $(P_n)_{n=1}^{\infty} \in \big(\mathcal{P}[a, b]\big)^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen mit der Eigenschaft, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \overline{\mathcal{I}}(f; P_n) \right\} \;\in\; \mathbb{R}$$

existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \overline{\mathcal{I}}(f; P_n) - \underline{\mathcal{I}}(f; P_n) \right\} \;=\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \overline{\mathcal{I}}(f; P_n) \right\}\,.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x\,dx\,,$$

indem Sie Aufgabeteil (a) mit einer von Ihnen konkret gewählten Folge von Partition anwenden.

Hinweis: Die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}$ kann nützlich sein.

Aufgabe 8.5 (4 Bonuspunkte) (Wärmeleitungsgleichung)

An einem runden Metallstab von 100 cm Länge und 1 cm^2 Querschnittsfläche, der sich im Ausgangszustand auf Umgebungstemperatur befindet (Umgebungstemperatur $T = 0\,\text{K}$), wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ an ein Ende ($x_0 = 0$) eine zeitlich konstante Temperatur ($T_0 = 200\,\text{K}$) gelegt, während das andere Ende auf $T_4 = 0\,\text{K}$ gehalten wird. Vereinfacht wird angenommen, dass der Metallstab an der Mantelfläche ideal isoliert ist, sodass kein radialer Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet und die Wärmeleitung nur in Längsrichtung erfolgt. Die Wärmeleitungsgleichung für den hier vorliegenden eindimensionalen Fall lautet:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2}$$

a) Wie lautet die Wärmeleitungsgleichung für den stationären Fall, wenn sich die endgültige Temperaturverteilung eingestellt hat?

b) Bitte integrieren Sie die Wärmeleitungsgleichung zweimal mit Hilfe der Stammfunktion und den Konstanten C_1 und C_2 und schreiben Sie die Gleichung für die Funktion $T(x)$ auf.

c) Setzen Sie die Randwerte in die Funktion $T(x)$ ein und ermitteln Sie die Werte für die Konstanten C_1 und C_2.

d) Welche Temperaturverteilung stellt sich über den Metallstab am Ende fest ein? Schreiben Sie die Zahlenwertgleichung in cm für die Funktion $T(x)$ auf und erläutern Sie das Ergebnis.