Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

Technische Universität Braunschweig

5. Übungsblatt

Ausgabe: 07.05.2026

Abgabe: 15.05.2026, 08:00 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 5.1 (2+3 Punkte)

Es sei $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right)_{m=1}^{\infty}$ absolut konvergent.

(b) Ist $(\sum_{m=1}^{n} b_n)_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe, so ist $\left(\sum_{n=1}^{m} \sqrt{|a_n b_n|}\right)_{m=1}^{\infty}$ absolut konvergent.

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\left|\sum_{n=1}^{m} w_n z_n\right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |w_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^2\right)$.

Aufgabe 5.2 (1+1+2+1 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$(a) \quad \left(\sum_{n=1}^{m} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{m=1}^{\infty} \qquad (b) \quad \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{n^2+1}{5^n}\right)_{m=0}^{\infty}$$

$$(c) \quad \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{4^n + (-1)^n 2^n}{6^n}\right)_{m=1}^{\infty} \qquad (d) \quad \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}\right)_{m=1}^{\infty}$$

Aufgabe 5.3 (3+1+1 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge und $z_0 \in \mathbb{C}$. Weiter definieren wir

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei wir $R = 0$ für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ und $R = \infty$ für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ setzen.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^n \right)_{m=1}^{\infty}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert und für alle $|z - z_0| > R$ divergiert.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $R = 0$, $R = \infty$ und $0 < R < \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{n=1}^{m} n a_n (z - z_0)^{n-1} \right)_{m=1}^{\infty}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert und für alle $|z - z_0| > R$ divergiert.

(c) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ an, für welche $0 < R < \infty$ gilt. Geben Sie für Ihre Wahl von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zwei Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| = |w| = R$ so an, dass $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n z^n \right)_{m=1}^{\infty}$ konvergiert und $\left(\sum_{n=1}^{m} a_n w^n \right)_{m=1}^{\infty}$ divergiert.

Aufgabe 5.4 (2+1,5+1,5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{3} z^n \right)_{m=1}^{\infty}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ divergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{4n^{12}}{n^n} z^n \right)_{m=1}^{\infty}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \right)_{m=1}^{\infty}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 5.3 ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 5.5 (4 Bonuspunkte) (Funktionen zu Beschreibung von Eingangs- und Ausgangssignale)

In der Elektrotechnik werden zur Beschreibung der Eingangs- und Ausgangssignale von Schaltungen verschiedene Funktionen verwendet. Hier sind einige Beispiele, die zu untersuchen sind.

(a) Zeigen Sie die Stetigkeit der Betragsfunktion $y = |x^2|$ mit Hilfe der bereits in der Vorlesung genutzten Grenzwertbetrachtungen.

(b) Skizzieren Sie die folgende Heaviside-Funktion $y = \theta(-x - a)$ mit $a = 3$.

(c) Skizzieren Sie die folgende Heaviside-Funktion $y = \theta(x)\theta(-x + a)$ mit $a = 2$

(d) Entwickeln Sie die Sigmoidfunktion, die einen stetigen Übergang der Heaviside-Funktion $y = \theta(-x)$ ermöglicht. Welche „Breite“ nimmt der Übergang ein?

Hinweis: Der Übergangsbereich kann vereinfacht als der Wertebereich angenommen werden, in dem $0{,}01 < y < 0{,}99$.