



2. Übungsblatt

Ausgabe: 16.04.2026

Abgabe: 23.04.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung

”Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX”

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 2.1 (1+1+1+2 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die reellen Zahlen \mathbb{R} wie folgt eingeführt:

Es bezeichne \mathbb{R} den eindeutigen total geordneten Körper, in dem $a + c < b + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt, in dem $ab > 0$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt, der \mathbb{Q} enthält und der das Supremumsaxiom erfüllt.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels der obigen Definition von \mathbb{R} .

- (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $y < nx$.
- (b) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-1} < \epsilon$.
- (c) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n < x \leq n + 1$.
- (d) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x - q \leq \epsilon$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabenteil (b) und (c) für den Beweis von (d).

Aufgabe 2.2 (1,5+1,5+2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils das Supremum $\sup\{A_i\} \in \mathbb{R}$ der folgenden Mengen $A_i \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) $A_1 = (a, b)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
- (b) $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$.
- (c) $A_3 = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 2.3 (5 Punkte)

Es seien $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $\mathcal{J} \neq \emptyset$ beliebige nichtleere Indexmengen und $A = \{a_{i,j} \mid i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}\}$ eine Teilmenge von \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass

$$\sup\{A\} = \sup_{i \in \mathcal{I}} \{ \sup_{j \in \mathcal{J}} \{a_{i,j}\} \} = \sup_{j \in \mathcal{J}} \{ \sup_{i \in \mathcal{I}} \{a_{i,j}\} \}.$$

Aufgabe 2.4 (5 Punkte)

Es seien $I_1 = (a, b)$ und $I_2 = (c, d)$ zwei nichtleere offene Intervalle in \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass I_1 und I_2 gleichmächtig sind, indem Sie eine bijektive Abbildung $f : I_1 \rightarrow I_2$ angeben.

Aufgabe 2.5 (4 Bonuspunkte) (Reihenentwicklung)

Ein Kondensator $C = 500 \mu\text{F}$ wird über eine Reihenschaltung mit einem Widerstand $R = 2 \text{ k}\Omega$ entladen. Der Kondensator ist aufgeladen und hat am Anfang für $t = 0$ eine Spannung $U_0 = 10 \text{ V}$. Die Spannung am Kondensator fällt monoton und soll durch eine geometrische Folge dargestellt werden:

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

Die Zeitschrittweite Δt für die Folge ist mit 20% der Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ zu wählen. Damit ergibt sich für den Faktor:

$$q = e^{-0.2} = 0,8187307.$$

- Rechnen Sie die Spannungswerte U_n für $n = 1, 2, \dots, 5$ am Kondensator in V aus. Diese Spannung liegt auch am Widerstand an. Der Entladestrom fließt durch den Widerstand.
- Berechnen Sie die Werte der Stromstärke in mA i_n für $n = 1$ bis 5 nach dem Ohmschen Gesetz $R = U/I$.
- Geben Sie die Gleichung der monoton fallenden Ladungsmenge als geometrische Reihe mit den Summanden in der Form $(a_0 \cdot q^n)$ an.

$$q_n = q_0 - \sum_{k=1}^n \Delta q_k$$

Die Anfangsladung des Kondensators beträgt $q_0 = 5 \text{ mC}$. Während eines Zeitschritts vermindert sich die Ladung auf den Kondensatorelektroden um $\Delta q_n = i_n \cdot \Delta t$.

- Berechnen Sie die Reihenglieder für $n = 1, 2, \dots, 5$ für die Ladungsmenge des Kondensators.