

IX. Normen und Banachräume

Zur Vorbereitung der Differenzialrechnung für vektorwertige Funktionen rufen wir einige Begriffe aus der Vorlesung zur *Linearen Algebra* in Erinnerung. Weitere Grundbegriffe der linearen Algebra, die für diese Vorlesung wichtig sind, finden Studienanfänger im ergänzenden Abschnitt IX.3.1. Ebenso wiederholen wir die schon bekannte Definition einer *Norm* und ergänzen diese mit zugehörigen topologischen Begriffen, die uns erlauben, Konvergenz auch für vektorwertige Folgen zu definieren.

Zunächst erinnern wir an den Begriff des Vektorraums selbst: Für $d \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist

$$\mathbb{K}^d := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{K} \right\} \quad (\text{IX.1})$$

mit komponentenweise definierten Vektorraumverknüpfungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \\ \vdots \\ x_d + \alpha y_d \end{pmatrix} \quad (\text{IX.2})$$

ein Vektorraum über \mathbb{K} der Dimension d ist. Mit Hilfe der kanonischen Basisvektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^d \quad (\text{IX.3})$$

kann man

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d \quad (\text{IX.4})$$

schreiben. Die Darstellung (IX.4) eines Vektors $x \in \mathbb{K}^d$ als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ ist eindeutig.

Auf \mathbb{R}^d ist durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{eukl}} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d \quad (\text{IX.5})$$

das euklidische Skalarprodukt definiert, und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,

$$|\langle x|y \rangle| \leq \sqrt{\langle x|x \rangle} \sqrt{\langle y|y \rangle}. \quad (\text{IX.6})$$

IX.1. Normierte Räume und Banachräume

Definition IX.1. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}).

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Norm (auf X)** : \Leftrightarrow

$$(i) \quad \forall x \in X : \quad \{\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\} \quad (\text{IX.7})$$

$$(ii) \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad (\text{IX.8})$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in X : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (\text{IX.9})$$

In diesem Fall bezeichnet man $(X, \|\cdot\|)$ als **normierten Vektorraum (über \mathbb{K})**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} , so definiert die Norm $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ einen Abstands begriff auf X . Für $x, y \in X$ kann nämlich $\|x - y\|$ als Abstand von x und y interpretiert werden. Mit diesem Abstands begriff können viele in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 angestellten geometrische Überlegungen auf X übertragen werden.
- Ist X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, so induziert das Skalarprodukt durch $\|x\| := \sqrt{\langle x|x \rangle}$ eine Norm auf X .
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$ bezüglich der **euklidischen Norm** $\|x\|_{\text{eukl}} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{\text{eukl}}}$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{R}
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_{\text{unit}})$ bezüglich der **unitären Norm** $\|x\|_{\text{unit}} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{\text{unit}}}$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{C} .
- Für $d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ definiert $\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm auf \mathbb{K}^d ; ebenso $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$. Diese Normen sind alle äquivalent zueinander, d.h. zu $1 \leq p, q \leq \infty$ gibt es eine Konstante $C_{d,p,q} < \infty$ so, dass

$$\forall x \in X : \quad \frac{1}{C_{d,p,q}} \cdot \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_{d,p,q} \cdot \|x\|_p. \quad (\text{IX.10})$$

Die durch das euklidische bzw. unitäre Skalarprodukt induzierte Norm ist $\|x\|_2$.

Definition IX.2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} .

(i) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \|x - x_n\| \leq \varepsilon. \quad (\text{IX.11})$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x \quad \text{oder} \quad x_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{IX.12})$$

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$ heißt **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon. \quad (\text{IX.13})$$

(iii) Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$

$$\text{Jede Cauchy-Folge in } (X, \|\cdot\|) \text{ ist konvergent.} \quad (\text{IX.14})$$

Einen vollständigen normierten Vektorraum bezeichnet man als **Banachraum**.

Lemma IX.3. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $(x^{(n)})_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^d$ eine Folge von Vektoren in $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl/unit}})$ mit

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_d^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (\text{IX.15})$$

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

$$\left\{ (x^{(n)})_{n=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{K}^d \right\} \quad (\text{IX.16})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall i \in \mathbb{Z}_1^d : (x_i^{(n)})_{n=1}^\infty \text{ ist konvergent in } \mathbb{K} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall i \in \mathbb{Z}_1^d : (x_i^{(n)})_{n=1}^\infty \text{ ist eine Cauchy-Folge in } \mathbb{K} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (x^{(n)})_{n=1}^\infty \text{ ist eine Cauchy-Folge in } \mathbb{K}^d \right\}, \quad (\text{IX.17})$$

und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x^{(n)}\} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_1^{(n)}\} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_d^{(n)}\} \end{pmatrix}. \quad (\text{IX.18})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Gemäß Lemma IX.3 sind $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$ und $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_{\text{unit}})$ für alle $d \in \mathbb{N}$ reelle bzw. komplexe Banachräume.

IX.2. Topologie und Stetigkeit in normierten Räumen

Definition IX.4. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Sind $r > 0$ und $x \in X$, so heißt

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\} \quad (\text{IX.19})$$

offene Kugel um x vom Radius r .

(ii) Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.)**

$$:\Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq A. \quad (\text{IX.20})$$

(iii) Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \forall r > 0 : (B(x, r) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset. \quad (\text{IX.21})$$

(iv) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**

$$:\Leftrightarrow \text{Jeder Punkt in } U \text{ ist ein innerer Punkt} \quad (\text{IX.22})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq U. \quad (\text{IX.23})$$

(v) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**

$$:\Leftrightarrow V \text{ enthält alle seine Häufungspunkte} \quad (\text{IX.24})$$

$$\Leftrightarrow \{x \text{ ist H.P. von } V \Rightarrow x \in V\}. \quad (\text{IX.25})$$

(vi) Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt **kompakt**

$:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche offene Überdeckung

$:\Leftrightarrow$ Ist \mathfrak{U} eine Familie offener Mengen mit $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$

$$\Rightarrow \exists U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathfrak{U} : K \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n. \quad (\text{IX.26})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum so sind die leere Menge $\emptyset \subseteq X$ und auch $X \subseteq X$ selbst sowohl offen als auch abgeschlossen.
- Sind $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt von A , wenn es eine konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in (A \setminus \{x\})^\mathbb{N}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x$.
- Sind $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so gilt wie in \mathbb{K} folgende Äquivalenz:

$$\{A \text{ ist offen}\} \Leftrightarrow \{A^c = X \setminus A \text{ ist abgeschlossen}\}. \quad (\text{IX.27})$$

- Für $d \in \mathbb{N}$ und $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$ oder $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_{\text{unit}})$ gilt wie für $d = 1$ folgende, als **Satz von Heine-Borel** bekannte Äquivalenz:

$$\{K \subseteq X \text{ ist kompakt}\} \Leftrightarrow \{K \subseteq X \text{ ist beschränkt und abgeschlossen}\}. \quad (\text{IX.28})$$

Definition IX.5. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume über \mathbb{K} und $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ zwei Teilmengen.

- (i) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig in $x \in M$**

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f[B_X(x, \delta)] \subseteq B_Y(f[x], \varepsilon) \quad (\text{IX.29})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in M : \|x' - x\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Ist f stetig in x , für alle $x \in M$, so nennen wir f **stetig**.

- (ii) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **folgenstetig in $x \in M$**

$$:\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \in M^{\mathbb{N}} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\}. \quad (\text{IX.30})$$

Ist f folgenstetig in x , für alle $x \in M$, so nennen wir f **folgenstetig**.

Satz IX.6. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume über \mathbb{K} , $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ zwei Teilmengen, $f : M \rightarrow N$ und $x \in M$. Dann gelten folgende Aussagen.

$$(i) \quad f \text{ ist stetig in } x \Leftrightarrow f \text{ ist folgenstetig in } x. \quad (\text{IX.31})$$

$$(ii) \quad f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f \text{ ist folgenstetig} \quad (\text{IX.32})$$

$$\Leftrightarrow \forall U \subseteq N : U \text{ ist offen} \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ ist offen} \quad (\text{IX.33})$$

$$\Leftrightarrow \forall V \subseteq N : V \text{ ist abgeschlossen} \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ ist abgeschlossen.} \quad (\text{IX.34})$$

(iii) Sind $f : M \rightarrow N$ stetig und $M \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(M) \subseteq Y$ kompakt.

(ii) Sind $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $M \subseteq X$ kompakt, so nimmt f auf M sein Minimum und Maximum an, d.h. es existieren $x_{\min}, x_{\max} \in M$ so, dass

$$\forall x \in M : f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}). \quad (\text{IX.35})$$

IX.3. Ergänzungen

IX.3.1. Vektorräume und lineare Abbildungen

Die *Lineare Algebra* ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen, die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Vektorräumen. In diesem Abschnitt führen wir einige Begriffe der linearen Algebra ein, ohne die wir die Inhalte aus *Analysis 2* nicht formulieren können und die deshalb unabdingbar sind. Wir beschränken uns hier auf Vektorräume über die Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen und \mathbb{C} der komplexen Zahlen, die wir wie schon in *Analysis 1* einheitlich mit \mathbb{K} bezeichnen, sofern die sich darauf beziehende Betrachtung für beide Fälle durchgeführt werden kann.

Definition IX.7. Eine Menge X heißt **Vektorraum über \mathbb{K}** oder **\mathbb{K} -Vektorraum** $:\Leftrightarrow$

Auf X sind Addition $(+): X \times X \rightarrow X$ und Multiplikation mit einem Skalar $(\cdot): \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ definiert, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(i) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in X: \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (\text{IX.36})$$

$$(ii) \quad \exists \vec{0} \in X \quad \forall \vec{a} \in X: \quad \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}, \quad (\text{IX.37})$$

$$(iii) \quad \forall \vec{a} \in X \quad \exists (-\vec{a}) \in X: \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}, \quad (\text{IX.38})$$

$$(iv) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \quad \begin{cases} \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \\ (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, \end{cases} \quad (\text{IX.39})$$

$$(v) \quad \forall \vec{a} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}. \quad (\text{IX.40})$$

Die Elemente von X heißen **Vektoren**, $\vec{0} \in X$ ist der **Nullvektor**. Eine Teilmenge $Z \subseteq X$, die selbst ein Vektorraum ist, bezeichnet man als **Teilraum** oder **Unterraum** von X . Vektorräume über \mathbb{R} bezeichnet man auch als **reelle Vektorräume**, Vektorräume über \mathbb{C} als **komplexe Vektorräume**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Gleichungen (IX.36), (IX.37) und (IX.38) besagen zusammen, dass X bezüglich der Addition $(+)$ eine abelsche Gruppe bildet.
- $\{\vec{0}\} \subseteq X$ ist der kleinste und $X \subseteq X$ der größte Unterraum von X .
- Sind $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in X$ Vektoren, so bezeichnet man Summen der Form $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \in X$ als **Linearkombination** der \vec{x}_j und die Zahlen α_j in diesem Zusammenhang als ihre **Koeffizienten**.
- *Multiplikation mit einem Skalar* und *Skalarprodukt* ist nicht dasselbe.
- \mathbb{K} ist ein Vektorraum über \mathbb{K} . (Dieses Beispiel ist allerdings etwas künstlich.)

- Für $d \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{K}^d = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{K} \right\} \quad (\text{IX.41})$$

bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation mit einem Skalar,

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \gamma x_d + y_d \end{pmatrix}, \quad (\text{IX.42})$$

ein Vektorraum über \mathbb{K} . Dabei sind

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_d \end{pmatrix}. \quad (\text{IX.43})$$

- Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir die **kanonischen Basisvektoren** durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IX.44})$$

Die Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d\} \subseteq \mathbb{K}^d$ bezeichnet man auch als **Standardbasis**.

- Mit der Standardbasis wird

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_d \vec{e}_d. \quad (\text{IX.45})$$

d.h. jeder Vektor kann als Linearkombination der d kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d \in \mathbb{K}^d$ mit seinen Komponenten $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{K}$ als Koeffizienten geschrieben werden.

- Die Darstellung (IX.45) ist eindeutig in dem Sinne, dass für $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_d, \beta_d \in \mathbb{K}$ aus $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_d \vec{e}_d = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_d \vec{e}_d$ auch $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_d = \beta_d$ folgen.
- Für $d = 1, 2, 3$ gewinnt man durch Zeichnungen eine gewisse Vorstellung von den Vektoren in \mathbb{R}^d .
- Schränkt man bei den komplexen Zahlen die Multiplikation auf die reellen Elemente ein, so ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum über \mathbb{R} (der Dimension 2).

- Ein weiteres Beispiel eines Vektorraums ist die Menge der reellen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

$$\mathcal{F} := \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (\text{IX.46})$$

Mit $f, g \in \mathcal{F}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ wird \mathcal{F} durch

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : (f + \gamma \cdot g)(x) := f(x) + \gamma \cdot g(x) \quad (\text{IX.47})$$

zum Vektorraum (“punktweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar”). Dabei sind

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : 0(x) := 0, \quad (-f)(x) := -f(x). \quad (\text{IX.48})$$

Für diesen Vektorraum \mathcal{F} liefert eine Zeichnung eine gewisse Anschauung.

- Das obige Beispiel lässt sich noch wie folgt verallgemeinern. Sind $A \neq \emptyset$ eine Menge und X ein Vektorraum über \mathbb{K} , so wird durch punktweise Addition und punktweise Multiplikation mit einem Skalar wie in (IX.47) auch der Funktionenraum

$$\mathcal{F}' := \{f : A \rightarrow X\} \quad (\text{IX.49})$$

zum Vektorraum über \mathbb{K} .

- Insbesondere ist \mathcal{F}' für $A := \mathbb{Z}_1^d$ und $X := \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ gleich (genauer: *isomorph zu*) \mathbb{K}^d ,

$$\mathbb{K}^d = \{\vec{x} : \mathbb{Z}_1^d \rightarrow \mathbb{K}, \nu \mapsto x_\nu\}. \quad (\text{IX.50})$$

- Die Notation für Vektoren mit Vektorpfeilen ist etwas schwerfällig, und wir schreiben im Folgenden einfach $x, y, e_m^{(X)}$ und $e_n^{(Y)}$ statt $\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_m^{(X)}$ und $\vec{e}_n^{(Y)}$.

Definition IX.8. Seien X und Y zwei \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt **linear** oder **(linearer) Operator**

$$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K} : A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y). \quad (\text{IX.51})$$

Die Menge der linearen Abbildungen $X \rightarrow Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X; Y)$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Menge $\mathcal{L}(X; Y)$ der linearen Abbildungen ist selbst ein \mathbb{K} -Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, d.h. für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(X; Y)$ ist $(\alpha A + B) \in \mathcal{L}(X; Y)$ definiert durch

$$\forall x \in X : (\alpha A + B)(x) := \alpha A(x) + B(x). \quad (\text{IX.52})$$

- Durch vollständige Induktion erhält man aus (IX.51) leicht, dass

$$A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A(x_i), \quad (\text{IX.53})$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in X$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

- $A(0_X) = A(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_X) = 0_{\mathbb{K}} \cdot A(0_X) = 0_Y$.
- Seien $M, N \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$ und $Y = \mathbb{K}^N$. Wir bezeichnen mit

$$e_1^{(X)}, e_2^{(X)}, \dots, e_M^{(X)} \subseteq X \quad \text{und} \quad e_1^{(Y)}, e_2^{(Y)}, \dots, e_N^{(Y)} \subseteq Y \quad (\text{IX.54})$$

die jeweiligen Standardbasen in \mathbb{K}^M und \mathbb{K}^N .

- Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ eine lineare Abbildung. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^M$ lässt sich der zugehörige Bildvektor $A(x) \in \mathbb{K}^N$ in eindeutiger Weise als Linearkombination $A(x) = \gamma_1 e_1^{(Y)} + \gamma_2 e_2^{(Y)} + \dots + \gamma_N e_N^{(Y)}$ der kanonischen Basisvektoren in \mathbb{K}^N darstellen.

Insbesondere gibt es $N \cdot M$ eindeutige Zahlen $\{a_{n,m} | n \in \mathbb{Z}_1^N, m \in \mathbb{Z}_1^M\}$ so, dass

$$\begin{aligned} A(e_1^{(X)}) &= a_{1,1} e_1^{(Y)} + a_{2,1} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,1} e_N^{(Y)}, \\ A(e_2^{(X)}) &= a_{1,2} e_1^{(Y)} + a_{2,2} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,2} e_N^{(Y)}, \\ &\vdots \\ A(e_M^{(X)}) &= a_{1,M} e_1^{(Y)} + a_{2,M} e_2^{(Y)} + \dots + a_{N,M} e_N^{(Y)} \end{aligned} \quad (\text{IX.55})$$

gelten.

- Für

$$x = x_1 e_1^{(X)} + x_2 e_2^{(X)} + \dots + x_M e_M^{(X)} \in X \quad (\text{IX.56})$$

ist dann

$$A(x) = y_1 e_1^{(Y)} + y_2 e_2^{(Y)} + \dots + y_N e_N^{(Y)} \in Y, \quad (\text{IX.57})$$

wobei

$$\forall n \in \mathbb{Z}_1^N : \quad y_n = \sum_{m=1}^M a_{n,m} x_m. \quad (\text{IX.58})$$

- Die zu A gehörige Zahlentabelle

$$\mathcal{M}[A] := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M \cdot N} \quad (\text{IX.59})$$

bezeichnet man als Matrix und genauer als Matrixdarstellung von A bezüglich der Standardbasen in \mathbb{K}^M und \mathbb{K}^N .

- Für $M, N \in \mathbb{N}$ ist die Matrixdarstellung $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N) \rightarrow \mathbb{K}^{M \cdot N}$ eine lineare Bijektion zwischen den Vektorräumen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$. D.h. \mathcal{M} ist bijektiv und es gilt $\mathcal{M}[\alpha A + B] = \alpha \mathcal{M}[A] + \mathcal{M}[B]$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$.

- Konkret bedeutet dies, dass man die Matrixdarstellung als riesigen Spaltenvektor interpretiert, den man aus Platzmangel in eine Tabelle mit N Zeilen und M Spalten schreibt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[A] &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}[B] = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \cdots & b_{N,M} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathcal{M}[\alpha A + B] &= \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & \alpha a_{1,M} + b_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{N,1} + b_{N,1} & \cdots & \alpha a_{N,M} + b_{N,M} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{IX.60})$$

- Obwohl dies aus Sicht der linearen Algebra etwas ungenau ist, werden wir im Weiteren nicht mehr zwischen $\mathcal{L}(\mathbb{K}^M; \mathbb{K}^N)$ und $\mathbb{K}^{M \cdot N}$ unterscheiden und die lineare Abbildung A mit ihrer Matrixdarstellung gleichsetzen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,M} \end{pmatrix}. \quad (\text{IX.61})$$

- Sind X, Y, Z drei \mathbb{K} -Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ sowie $B \in \mathcal{L}(X; Y)$, so ist auch deren Komposition linear, $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$.
- Sind $M, N, P \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{K}^M$, $Y = \mathbb{K}^N$, $Z = \mathbb{K}^P$, so ist für $A \in \mathcal{L}(Y; Z)$ und $B \in \mathcal{L}(X; Y)$ die Matrixdarstellung von $(A \circ B) \in \mathcal{L}(X; Z)$ durch das *Matrixprodukt* der Matrixdarstellungen von A und B gegeben.

IX.3.2. Inneres und Abschluss von Mengen

Durch Nachprüfen der Definition IX.4 erhält man leicht folgende Aussage.

Lemma IX.9. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

- (i) Sind I eine Indexmenge und $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Familie offener Mengen, so ist auch deren Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.
- (ii) Sind $m \in \mathbb{N}$ und $U_1, U_2, \dots, U_m \subseteq X$ endlich viele offene Teilmengen von X , so ist auch ihr Durchschnitt $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$ offen.
- (iii) Sind J eine Indexmenge und $\{V_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so ist auch deren Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} V_j$ abgeschlossen.
- (iv) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $V_1, V_2, \dots, V_n \subseteq X$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen von X , so ist auch ihre Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ abgeschlossen.

Definition IX.10. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Die Vereinigung

$$A^\circ := \bigcup \{U \mid U \subseteq A, U \text{ offen}\} \quad (\text{IX.62})$$

aller offenen Teilmengen von A heißt **Inneres von A** .

(ii) Der Durchschnitt

$$\bar{A} := \bigcap \{V \mid A \subseteq V \subseteq X, V \text{ abgeschlossen}\} \quad (\text{IX.63})$$

aller abgeschlossenen Obermengen A heißt **Abschluss von A** .

Bemerkungen und Beispiele.

- Nach Lemma IX.9 (i) ist das Innere A° einer Teilmenge $A \subseteq X$ eines normierten Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$ stets offen.
- Analog ist nach Lemma IX.9 (iii) der Abschluss \bar{A} einer Teilmenge $A \subseteq X$ stets abgeschlossen.
- Das Innere A° einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist die größte offene Teilmenge von A , d.h. für jede offene Teilmenge $B \subseteq A$ folgt $B \subseteq A^\circ$.
- Außerdem kann A° als die Menge aller inneren Punkte von A charakterisiert werden,

$$A^\circ = \{x \in A \mid x \text{ ist I.P. von } A\}. \quad (\text{IX.64})$$

- Der Abschluss \bar{A} einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A , d.h. für jede abgeschlossene Obermenge $C \supseteq A$ folgt $C \supseteq \bar{A}$.
- Außerdem kann \bar{A} als die Menge aller Punkte aus A und aller Häufungspunkte von A charakterisiert werden,

$$\bar{A} = \{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \text{ ist H.P. von } A\}. \quad (\text{IX.65})$$