

VIII. Integration

In diesem Kapitel führen wir das *Riemann-Integral* für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen ein. Das Lebesgue-Integral wird in einer späteren Vorlesung behandelt.

VIII.1. Partitionen, Ober- und Untersummen

Definition VIII.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- (i) Eine endliche Teilmenge $P = \{x_1, x_2, \dots, x_L\} \subseteq (a, b)$ von (a, b) heißt **Partition von $[a, b]$** . Wir wollen stets annehmen, dass die Punkte in P aufsteigend geordnet sind, also

$$a =: x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_L < x_{L+1} := b. \quad (\text{VIII.1})$$

Die Menge der Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}[a, b]$.

- (ii) Seien $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ zwei Partitionen von $[a, b]$.

$$P \text{ heißt } \mathbf{feiner} \text{ als } P' \quad :\Leftrightarrow \quad P' \subseteq P. \quad (\text{VIII.2})$$

Wir sagen auch, dass P eine **Verfeinerung von P'** ist.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass zwei Partitionen nicht immer vergleichbar bezüglich ihrer Feinheit sind. Sind nämlich $P \setminus P'$ und $P' \setminus P$ beide nicht leer, so ist weder P feiner als P' noch P' feiner als P . Es lässt sich aber immer eine Partition P'' finden, die sowohl feiner als P als auch feiner als P' ist, nämlich

$$P'' = P \cup P'. \quad (\text{VIII.3})$$

Eine Ordnungsrelation mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *partielle Ordnung*.

Definition VIII.2. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, also $f([a, b]) \subseteq [-R, R]$, für genügend großes $R < \infty$. Sei weiterhin $P = \{x_1, x_2, \dots, x_L\} \subseteq (a, b)$ eine Partition.

- (i) Wir definieren die **Untersumme** $\underline{\mathcal{I}}(f; P)$ und die **Obersumme** $\overline{\mathcal{I}}(f; P)$ durch

$$\underline{\mathcal{I}}(f; P) := \sum_{j=0}^L (x_{j+1} - x_j) \cdot \inf \{f(x) \mid x_j \leq x \leq x_{j+1}\}, \quad (\text{VIII.4})$$

$$\overline{\mathcal{I}}(f; P) := \sum_{j=0}^L (x_{j+1} - x_j) \cdot \sup \{f(x) \mid x_j \leq x \leq x_{j+1}\}. \quad (\text{VIII.5})$$

(ii) Wir definieren das **Untegral** $\int_a^b f(x) dx$ und das **Oberintegral** $\int_a^b f(x) dx$ von f durch

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ \underline{\mathcal{I}}(f; P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \}, \quad (\text{VIII.6})$$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ \overline{\mathcal{I}}(f; P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \}. \quad (\text{VIII.7})$$

Lemma VIII.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ zwei Partitionen von $[a, b]$. Ist P' feiner als P , so gilt

$$\underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq \underline{\mathcal{I}}(f; P'), \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{I}}(f; P) \geq \overline{\mathcal{I}}(f; P'). \quad (\text{VIII.8})$$

Beweis. Wir beweisen nur $\underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq \underline{\mathcal{I}}(f; P')$. Sind $P = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}$, $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_L < x_{L+1} := b$, und $y \in (a, b) \setminus P$, dann gibt es ein $k \in \{0, 1, 2, \dots, L\}$, so dass $x_k < y < x_{k+1}$, und es gilt

$$\begin{aligned} & (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \} & (\text{VIII.9}) \\ &= (x_{k+1} - y) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \} + (y - x_k) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \} \\ &\leq (x_{k+1} - y) \cdot \inf \{ f(x) \mid y \leq x \leq x_{k+1} \} + (y - x_k) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq y \}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} & \underline{\mathcal{I}}(f, P \cup \{y\}) - \underline{\mathcal{I}}(f, P) \\ &= (y - x_k) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq y \} + (x_k - y) \cdot \inf \{ f(x) \mid y \leq x \leq x_{k+1} \} \\ &\quad - (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf \{ f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1} \} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.10})$$

Für $P' \setminus P = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ erhalten wir also in M Schritten

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{I}}(f; P) &\leq \underline{\mathcal{I}}(f; P \cup \{y_1\}) \leq \underline{\mathcal{I}}(f; P \cup \{y_1, y_2\}) \\ &\leq \dots \leq \underline{\mathcal{I}}(f; P \cup \{y_1, y_2, \dots, y_M\}) = \underline{\mathcal{I}}(f, P'). \end{aligned} \quad (\text{VIII.11})$$

□

Lemma VIII.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{VIII.12})$$

Beweis. Nach Lemma VIII.3 gilt für je zwei Partitionen $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ von $[a, b]$, dass

$$\underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq \underline{\mathcal{I}}(f; P \cup P') \leq \overline{\mathcal{I}}(f; P \cup P') \leq \overline{\mathcal{I}}(f; P'). \quad (\text{VIII.13})$$

Da P' eine beliebige Partition ist, folgt daraus auch

$$\forall P : \underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq \inf \{ \overline{\mathcal{I}}(f; P') \mid P' \in \mathcal{P}[a, b] \}, \quad (\text{VIII.14})$$

also

$$\sup_{P \in \mathcal{P}[a, b]} \{ \underline{\mathcal{I}}(f, P) \} \leq \inf_{P' \in \mathcal{P}[a, b]} \{ \overline{\mathcal{I}}(f, P') \}. \quad (\text{VIII.15})$$

□

Definition VIII.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar auf $[a, b]$** : \Leftrightarrow

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx. \quad (\text{VIII.16})$$

In diesem Fall schreiben wir $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $\int_a^b f(x) dx$ heißt **(Riemann-)Integral von f von a nach b** .

Lemma VIII.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$\left[f \in \mathcal{R}[a, b] \right] \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}[a, b] : \overline{\mathcal{I}}(f; P) - \underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq \varepsilon \right]. \quad (\text{VIII.17})$$

Satz VIII.7. Seien $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

(i) Dann ist $(f + \alpha g) \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b (f + \alpha g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \alpha \int_a^b g(x) dx. \quad (\text{VIII.18})$$

(ii) Ist $f(x) \leq g(x)$, für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (\text{VIII.19})$$

(iii) Mit $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ist auch $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (\text{VIII.20})$$

VIII.2. Riemann-integrierbare Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir eine (möglichst große) Familie Riemann-integrierbarer Funktionen identifizieren. Dafür stellen wir zunächst fest, dass stetige Funktionen auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar sind.

Satz VIII.8. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Beweis. Den Beweis findet man bei den Ergänzungen im Anhang VIII.5.3. □

Weiterhin beobachten wir, dass ein ‘Ausreißer’ als Funktionswert das Integral nicht verändert.

Satz VIII.9. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}, a < c < b$ und $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b]$, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (\text{VIII.21})$$

Sind umgekehrt $f_{ac} \in \mathcal{R}[a, c]$ und $f_{cb} \in \mathcal{R}[c, b]$, dann ist mit

$$f(x) := \begin{cases} f_{ac}(x) & \text{für } x \in [a, c), \\ \text{beliebig, } \in \mathbb{R} & \text{für } x = c, \\ f_{cb}(x) & \text{für } x \in (c, b] \end{cases} \quad (\text{VIII.22})$$

auch $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f_{ac}(x) dx + \int_c^b f_{cb}(x) dx. \quad (\text{VIII.23})$$

Aus den Sätzen VIII.8 und VIII.9 ergibt sich durch eine einfache Induktion sofort folgendes Korollar.

Korollar VIII.10. Seien $a_0, a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R}, a_j < a_{j+1}$, und $f : [a_0, a_M] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. f ist stetig auf (a_j, a_{j+1}) und die Grenzwerte $\lim_{x \searrow a_j} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow a_j} f(x)$ existieren für $j = 0, 1, 2, \dots, M - 1$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a_0, a_M]$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$.
- Seien $M \in \mathbb{N}$ und $f_M : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$,

$$f_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{0, a_1, a_2, \dots, a_M, 1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{VIII.24})$$

Mit einer geeigneten Umordnung ist dann $0 < a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_M} < 1$, und f_M ist stückweise stetig. Nach Korollar VIII.10 ist also $f_M \in \mathcal{R}[0, 1]$ und

$$\int_0^1 f_M(x) dx = 0. \quad (\text{VIII.25})$$

- Die **Dirichlet-Funktion** $f_\infty : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (\text{VIII.26})$$

Seien $P = \{x_1, x_2, \dots, x_L\} \subseteq (0, 1)$, $x_0 := 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_L < x_{L+1} := 1$, eine Partition von $[0, 1]$. Zu jedem $k \in \{0, 1, \dots, L\}$ gibt es zwei Zahlen,

$$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (x_k, x_{k+1}), \quad \beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x_k, x_{k+1}). \quad (\text{VIII.27})$$

Dies hat zur Folge, dass

$$0 \leq \inf_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\} \leq f_\infty(\beta) = 0, \quad (\text{VIII.28})$$

$$1 \geq \sup_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\} \geq f_\infty(\alpha) = 1. \quad (\text{VIII.29})$$

Somit ist, für alle $P \in \mathcal{P}[0, 1]$,

$$\overline{\mathcal{I}}(f_\infty; P) = \sum_{k=0}^L \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{=1} \cdot \underbrace{\sup_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\}}_{=1} = 1, \quad (\text{VIII.30})$$

$$\underline{\mathcal{I}}(f_\infty; P) = \sum_{k=0}^L \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{=1} \cdot \underbrace{\inf_{x \in I_k} \{f_\infty(x)\}}_{=0} = 0, \quad (\text{VIII.31})$$

also

$$\int_0^1 f_\infty(x) dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f_\infty(x) dx}. \quad (\text{VIII.32})$$

Die Dirichlet-Funktion ist also *nicht* Riemann-integrierbar.

- In der Dirichlet-Funktion manifestiert sich die Schwäche des Riemann-Integralbegriffs. Nicht, dass der Wert des Integrals dieser pathologischen Funktion irgend eine Bedeutung hätte. Vielmehr ist f_∞ als Limes von f_M anzusehen:

Für festes $x \in [0, 1]$ betrachten wir die Folge $(f_M(x))_{M=1}^\infty$ in $\{0, 1\}$.

(i) Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist $f_M(x) = 0 = f_\infty(x)$, $\forall M \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist umgekehrt $x \in \mathbb{Q}$, dann gibt es ein $K(x) \in \mathbb{N}$, so dass $x = a_{K(x)}$. Für alle $M \geq K(x)$ ist dann $f_M(x) = 1 = f_\infty(x)$.

Zusammenfassend erhalten wir, dass $(f_M(x))_{M=1}^\infty$ eine monoton steigende Funktionenfolge ist, $f_M(x) \leq f_{M+1}(x)$, und dass f_M *punktweise* gegen f_∞ konvergiert, d.h.

$$\forall x \in [0, 1]: \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \{f_M(x)\} = f_\infty(x). \quad (\text{VIII.33})$$

Die Folge $(f_M)_{M=1}^\infty$ und ihr Limes f_∞ bilden also ein *Gegenbeispiel* für die Vermutung, dass

$$\left[f_M \xrightarrow{pktw.} f_\infty \right] \Rightarrow \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 f_M(x) dx = \int_0^1 f_\infty(x) dx \right], \quad (\text{VIII.34})$$

ja sogar, dass

$$\left[f_M \xrightarrow{pktw.} f_\infty, f_M \in \mathcal{R}[0, 1] \right] \Rightarrow \left[f_\infty \in \mathcal{R}[0, 1] \right], \quad (\text{VIII.35})$$

d.h. Aussagen (VIII.34) und (VIII.35) sind i.A. beide falsch! Aus diesem Grund wurden vor über 100 Jahren die Maßtheorie und das Lebesgue-Integral entwickelt – eine sehr fruchtbare Entwicklung, wie sich später gezeigt hat.

- Schließlich beobachten wir, dass sich aus der Dirichlet-Funktion leicht ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Satz VIII.7 (iii) konstruieren lässt: Setzen wir $f := f_\infty - \frac{1}{2}$, so ist $|f| \equiv \frac{1}{2} \in \mathcal{R}[0, 1]$ aber $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$.

VIII.3. Integration und Differentiation

Satz VIII.11. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x \in (a, b]: \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad F(a) := 0. \quad (\text{VIII.36})$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) F ist stetig auf $[a, b]$.
- (ii) Ist f stetig in $x_0 \in (a, b)$, dann ist F differenzierbar bei x_0 , und es gilt

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (\text{VIII.37})$$

Beweis.

Zu (i): Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f folgt auch dessen Beschränktheit,

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in [a, b]: \quad |f(x)| \leq M. \quad (\text{VIII.38})$$

Damit ist aber nach Satz VIII.7

$$\forall a \leq y < x \leq b: \quad |F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq M(x - y), \quad (\text{VIII.39})$$

und F ist (sogar gleichmäßig) stetig auf $[a, b]$.

Zu (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig in $x_0 \in (a, b)$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]: \quad |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (\text{VIII.40})$$

Für $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ gilt also nach Satz VIII.7 (iii)

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \cdot |F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \cdot f(x_0)| \\ &= \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left| \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \varepsilon \cdot \int_{x_0}^x dt = \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{VIII.41})$$

Analog zu (VIII.41) erhält man dieselbe Ungleichung, falls $x_0 - \delta \leq x < x_0$ und somit insgesamt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right\} = f(x_0). \quad (\text{VIII.42})$$

□

Satz VIII.12 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung¹). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und derart, dass*

$$\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x). \quad (\text{VIII.43})$$

Dann heißt F **Stammfunktion von f** ², und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (\text{VIII.44})$$

Beweis. Sei $P = \{x_1, \dots, x_L\} \in \mathcal{P}[a, b]$ eine Partition mit $x_0 := a < x_1 < x_2 < \dots < x_L < x_{L+1} := b$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz VII.8, gibt es zu jedem $k \in \{0, 1, 2, \dots, L\}$ ein $y_k \in (x_k, x_{k+1})$, so dass

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k) \cdot f(y_k). \quad (\text{VIII.45})$$

Also ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_{L+1}) - F(x_0) \\ &= [F(x_{L+1}) - F(x_L)] + [F(x_L) - F(x_{L-1})] + \dots + [F(x_1) - F(x_0)] \\ &= \sum_{k=0}^L \{F(x_{k+1}) - F(x_k)\} = \sum_{k=0}^L (x_{k+1} - x_k) \cdot f(y_k). \end{aligned} \quad (\text{VIII.46})$$

Da

$$\inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\} \leq f(y_k) \leq \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\}, \quad (\text{VIII.47})$$

¹engl.: “fundamental theorem of calculus”

²engl.: “integral of f ”.

folgt aus (VIII.46), dass

$$\underline{\mathcal{I}}(f; P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\mathcal{I}}(f; P). \quad (\text{VIII.48})$$

Also ist

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \{\underline{\mathcal{I}}(f; P)\} \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \{\overline{\mathcal{I}}(f; P)\} = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{VIII.49})$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir berechnen $I = \int_1^2 x^2 dx$. Für $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $F(x) := \frac{1}{3}x^3$ und $f(x) := x^2$ sind F und f stetig und differenzierbar auf \mathbb{R} , deswegen ist auch $f \in \mathcal{R}[1, 2]$, und weiterhin gilt $F' = f$ auf \mathbb{R} . Daher ist

$$\int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = \frac{2^3 - 1^3}{3} = \frac{7}{3}. \quad (\text{VIII.50})$$

- Wir berechnen $J = \int_0^5 \cos(x) dx$. Für $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $F(x) := \sin(x)$ und $f(x) := \cos(x)$ sind F und f stetig und differenzierbar auf \mathbb{R} , deswegen ist auch $f \in \mathcal{R}[0, 5]$, und es gilt $F' = f$ auf \mathbb{R} . Daher ist

$$\int_0^5 \cos(x) dx = \int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = \sin(5) - \sin(0) = \sin(5). \quad (\text{VIII.51})$$

Satz VIII.13 (Partielle Integration). ³ Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und $F', G' \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann sind $F'G, G'F \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b F'(x)G(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)G'(x) dx. \quad (\text{VIII.52})$$

Beweis. Man sieht leicht, dass mit $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ auch $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$. Da F und G stetig auf $[a, b]$ sind, gilt insbesondere $F, G \in \mathcal{R}[a, b]$. Demnach sind also auch $F'G, G'F \in \mathcal{R}[a, b]$. Setzen wir

$$\forall x \in [a, b] : H(x) := F(x) \cdot G(x), \quad (\text{VIII.53})$$

so folgt (VIII.52) direkt aus Satz VIII.12 und der Produktregel, Satz VII.4. □

Bemerkungen und Beispiele.

³engl.: “integration by parts” und nicht “partial integration”

- Wir wollen $I = \int_1^2 x^2 \sin(x) dx$ mit Hilfe der partiellen Integration berechnen. Dabei stellt sich zunächst die Frage, welche Wahl wir für F und G treffen. Definieren wir $F'(x) := x^2$ und $G(x) := \sin(x)$, so sind $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ und $G'(x) = \cos(x)$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine frei wählbare Konstante ist, die wir gleich Null wählen, also $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Damit sind F, F', G, G' alle integrierbar auf $[1, 2]$, und

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 F'(x) G(x) dx = \left[F(x)G(x) \right]_1^2 - \int_1^2 F(x) G'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \sin(x) \right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 \cos(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{VIII.54})$$

wobei wir wie üblich $[h(x)]_a^b := h(b) - h(a)$ notieren. Nun ist jedoch das ursprünglich zu berechnende Integral I in ein komplizierteres umgewandelt worden. Die obige Wahl von F und G ist also offensichtlich ungeeignet.

- Wir machen einen zweiten Versuch zur Berechnung von $I = \int_1^2 x^2 \sin(x) dx$ mit Hilfe der partiellen Integration. Diesmal setzen wir $F_1'(x) := \sin(x)$ und $G_1(x) := x^2$, sodass $F_1(x) = -\cos(x) + C$ und $G_1'(x) = 2x$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine frei wählbare Konstante ist, die wir gleich Null wählen, also $F_1(x) = -\cos(x)$. Damit sind F_1, F_1', G_1, G_1' alle integrierbar auf $[1, 2]$, und

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 F_1'(x) G_1(x) dx = \left[F_1(x)G_1(x) \right]_1^2 - \int_1^2 F_1(x) G_1'(x) dx \\ &= \left[-\cos(x) x^2 \right]_1^2 + 2 \int_1^2 x \cos(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{VIII.55})$$

Der Grad des Monoms ist also um eins reduziert worden. Wir wenden nochmals partielle Integration an, und zwar mit $F_2'(x) := \cos(x)$ und $G_2(x) := x$, sodass $F_2(x) = \sin(x)$ und $G_2'(x) = 1$. Damit wird

$$\begin{aligned} I &= \left[-x^2 \cos(x) \right]_1^2 + 2 \int_1^2 x \cos(x) dx \\ &= \left[-x^2 \cos(x) \right]_1^2 + 2 \left[x \sin(x) \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \sin(x) dx \\ &= \left[-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) \right]_1^2 \\ &= -2 \cos(2) + 4 \sin(2) - \cos(1) - 2 \sin(1). \end{aligned} \quad (\text{VIII.56})$$

Satz VIII.14 (Variablensubstitution). *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und strikt monoton steigend, $\varphi'(t) > 0, \forall t \in (a, b)$. Sei weiterhin $f \in \mathcal{R}[\varphi_a, \varphi_b]$, wobei $\varphi_a := \varphi(a), \varphi_b := \varphi(b)$. Dann ist $(t \mapsto (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)) \in \mathcal{R}[a, b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s) ds. \quad (\text{VIII.57})$$

Beweis. Hat f eine Stammfunktion F (d.h. es gilt $F' = f$), dann folgt die Aussage direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel.

Einerseits gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(s) ds = F(\varphi_b) - F(\varphi_a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Andererseits ist

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

und daher

$$\int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

was die Behauptung zeigt.

Den ausführlichen Beweis im allgemeinen Fall findet man im Anhang. \square

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass es einen Satz VIII.14 entsprechenden Satz für strikt monoton fallendes φ gibt.
- Merkregel: Substituiere $s := \varphi(t)$ und "erweitere" mit dt :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds = \int_a^b f[\varphi(t)] \frac{d\varphi(t)}{dt} dt. \quad (\text{VIII.58})$$

Wir bemerken, dass (VIII.58) auch im Prinzip für nicht-monotone $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Allerdings sind die Voraussetzungen stärker, und man muss auf formale Manipulation achten.

- Wir berechnen $J = \int_0^5 \frac{ds}{1+s^2}$. Dazu definieren wir $\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) := \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ und beobachten, dass

$$\varphi'(t) = \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t) = 1 + \varphi^2(t). \quad (\text{VIII.59})$$

Nach Satz VIII.14 ist damit

$$J = \int_{\arctan(0)}^{\arctan(5)} \frac{\varphi'(t) dt}{1 + \varphi^2(t)} = \int_0^{\arctan(5)} dt = \arctan(5). \quad (\text{VIII.60})$$

VIII.4. Absolute Integrabilität und Uneigentliche Integrale

In Kapitel V.2 haben wir gesehen, dass der Begriff der *absoluten Konvergenz* von Reihen eine zentrale Bedeutung besitzt; unter anderem wegen des großen Umordnungssatzes, Satz V.7. Wir bauen nun analog den entsprechenden Begriff der *absolut integrierbaren*

Funktionen auf. Dazu verwenden wir folgende Notation: Sind $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\lambda > 0$, so definieren wir $f_\lambda : [-\lambda, \lambda] \rightarrow [-\lambda, \lambda]$ durch

$$f_\lambda(x) := \mathbb{1}_{\{x : |f(x)| \leq \lambda\}}(x) f(x) - \lambda \mathbb{1}_{\{x : f(x) < -\lambda\}}(x) + \lambda \mathbb{1}_{\{x : f(x) > \lambda\}}(x), \quad (\text{VIII.61})$$

d.h. anschaulich gesprochen setzen wir einen quadratischen, um den Ursprung zentrierten Rahmen der Kantenlänge 2λ auf den Graphen von f und schneiden alles außerhalb des Rahmens ab. Analog zu (VIII.100) sieht man, dass für jedes Intervall $J \subseteq [-\lambda, \lambda]$

$$\sup_J \{f_\lambda\} - \inf_J \{f_\lambda\} \leq \sup_J \{f\} - \inf_J \{f\} \quad (\text{VIII.62})$$

gilt, woraus wiederum

$$0 \leq \overline{\mathcal{I}}(f_\lambda; P) - \underline{\mathcal{I}}(f_\lambda; P) \leq \overline{\mathcal{I}}(f; P) - \underline{\mathcal{I}}(f; P) \quad (\text{VIII.63})$$

für jede Partition $P \in \mathcal{P}[-\lambda, \lambda]$ folgt. Nach Lemma VIII.6 ist also $f_\lambda \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda]$, falls $f \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda]$.

Definition VIII.15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **absolut (Riemann-)integrabel**

$$:\Leftrightarrow \forall \lambda > 0 : f_\lambda \in \mathcal{R}[-\lambda, \lambda], \quad (\text{VIII.64})$$

$$\sup_{\lambda > 0} \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} |f_\lambda(x)| dx \right\} < \infty. \quad (\text{VIII.65})$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} f_\lambda(x) dx \right\} \quad (\text{VIII.66})$$

uneigentliches Integral von f über \mathbb{R} .

Satz VIII.16. Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolut integrabel und $\alpha, a \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + \alpha g$ absolut integrabel und es gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f + \alpha g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, \quad (\text{VIII.67})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^m f(x) dx \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-n}^m f(x) dx \right\}, \quad (\text{VIII.68})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (\text{VIII.69})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \frac{\mathbb{1}_{(0,1)}(x)}{\sqrt{x}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{VIII.70})$$

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{VIII.71})$$

$$h(x) := \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(x)}{\sqrt{|x|} + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|} + x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.72})$$

gegeben sind, sind alle absolut integrabel.

Für f gilt

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \frac{1}{\lambda^2} < x < 1, \\ \lambda, & 0 < x \leq \frac{1}{\lambda^2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{VIII.73})$$

Also ist für $\lambda > 1$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f_\lambda(x) dx = \int_0^{1/\lambda^2} \lambda dx + \int_{1/\lambda^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{VIII.74})$$

Es ist

$$\int_0^{1/\lambda^2} \lambda dx + \int_{1/\lambda^2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \left[2\sqrt{x} \right]_{1/\lambda^2}^1 = \frac{1}{\lambda} + 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \rightarrow 2, \quad (\text{VIII.75})$$

im Limes $\lambda \rightarrow \infty$.

Zur Untersuchung von g bemerken wir, dass $g_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $\lambda > 1$ und daher

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g_\lambda(x) dx = \arctan(\lambda) - \arctan(-\lambda) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \quad (\text{VIII.76})$$

im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ gilt.

Für h ist das Argument etwas aufwändiger: Für $|x| < 1$ mit $x \neq 0$ gilt $h(x) \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, und für $|x| \geq 1$ gilt $h(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$. Insgesamt ist also

$$0 \leq h(x) \leq \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & 0 < |x| < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (\text{VIII.77})$$

Für $|x| < 1$ argumentieren wir wie für f , und für $|x| \geq 1$ argumentieren wir wie bei der Untersuchung von g . Insgesamt sehen wir, dass für $\lambda > 1$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |h_\lambda(x)| dx \leq \int_{-\lambda}^{-1} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-1}^{-1/\lambda^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{1/\lambda^2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\lambda} \frac{dx}{1+x^2}, \quad (\text{VIII.78})$$

wobei wir $\int_a^b \frac{dx}{q(x)} := \int_a^b \frac{1}{q(x)} dx$ schreiben. Aus den vorigen Beispielen wissen wir, dass alle vier Integrale für $\lambda > 0$ beschränkt sind und daher folgt die absolute Integrabilität von h . (Beachte: Den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$ haben wir nicht berechnet, aber wir wissen, dass er existiert und eindeutig ist.)

- Es ist zwar für alle $\lambda > 0$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sin(x) dx = 0, \quad (\text{VIII.79})$$

da $\sin(-x) = -\sin(x)$, und daher ist auch

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin(x) dx = 0, \quad (\text{VIII.80})$$

aber dennoch ist $x \mapsto \sin(x)$ nicht absolut integabel, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = 2 \quad (\text{VIII.81})$$

und daher

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |\sin(x)| dx \geq 2k, \quad (\text{VIII.82})$$

für $\lambda \geq k\pi$. Also ist

$$\sup_{\lambda > 0} \int_{-\lambda}^{\lambda} |\sin(x)| dx \geq \sup_{\lambda > 0} \left\{ \frac{2(\lambda - 1)}{\pi} \right\} = \infty. \quad (\text{VIII.83})$$

Wir bemerken, dass in diesem Fall auch die beiden Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^m \sin(x) dx$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-n}^m \sin(x) dx$ nicht existieren.