VII. Differentiation

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff der Ableitung für reelle Funktionen einer reellen Variablen diskutieren. Der allgemeine Fall einer vektorwertigen Funktion wird später noch ausführlich behandelt.

VII.1. Differenzierbare Funktionen

Definition VII.1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) f ist **bei** $x_0 \in U$ **differenzierbar** $:\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) \ := \ \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \ \in \ \mathbb{R} \tag{VII.1}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ **Ableitung von** f **bei** x_0, und wir schreiben auch

$$f'(x_0) \ =: \ \frac{df(x_0)}{dx} \ =: \ \left(\frac{d}{dx} f \right)(x_0). \tag{VII.2}$$

Der Quotient $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)$, für $x \neq x_0$ heißt **Differenzenquotient**.

(ii) f ist auf U differenzierbar $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ differenzierbar.} \tag{VII.3}$$

Lemma VII.2. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\Big[f \text{ ist bei } x_0 \in U \text{ differenzierbar} \Big] \ \Leftrightarrow \\ \Big\{ \exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, |x - x_0| \leq \delta : \\ \Big| f(x) - \big(f(x_0) + c \cdot (x - x_0) \big) \Big| \ \leq \ \varepsilon \cdot |x - x_0| \Big\}. \tag{VII.4}$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz VI.6 (Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit). $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Glg. (VII.4) sagt, dass $f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0)$ die beste lineare Approximation für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 ist.

  Die Gleichung lässt sich auch schreiben als

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - \big(f(x_0) + c \cdot (x - x_0)\big)}{x - x_0} \right| = 0.$$

Lemma VII.3. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist f in $x_0 \in U$ stetig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $U \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \big\{ f(x_n) \big\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right) \cdot (x_n - x_0) \; + \; f(x_0) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right\} \cdot \lim_{n\to\infty} \big\{ x_n - x_0 \big\} \; + \; f(x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \;=\; f(x_0). \qquad \text{(VII.5)}
\end{aligned}$$

□

Satz VII.4. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + \alpha g$, $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x_0, und es gelten*

(i) die ***Linearität****, d.h. es gilt*

$$\big(f + \alpha g\big)'(x_0) \;=\; f'(x_0) + \alpha g'(x_0), \qquad \text{(VII.6)}$$

(ii) die ***Produktregel****,*

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0), \qquad \text{(VII.7)}$$

(ii) und, für $g(x_0) \neq 0$, die ***Quotientenregel***

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \qquad \text{(VII.8)}$$

Beweis. Gleichung (VII.6) folgt aus

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{(f+\alpha g)(x) - (f+\alpha g)(x_0)}{x - x_0} \right\} &= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} + \alpha \lim_{x\to x_0} \left\{ \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} \right. \\
&= f'(x_0) + \alpha g'(x_0). \qquad \text{(VII.9)}
\end{aligned}$$

Für den Beweis von (VII.7) benutzen wir die Stetigkeit von f und g bei x_0, nach Lemma VII.3. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right\} \qquad \text{(VII.10)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x)[g(x) - g(x_0)] + [f(x) - f(x_0)]g(x_0)}{x - x_0} \right\} \\
&= \lim_{x\to x_0} \{f(x)\} \cdot \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} + \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} \cdot g(x_0) \\
&= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0).
\end{aligned}
$$

Für $g(x_0) \neq 0$ ist

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{1}{(x - x_0)} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) \right\} \qquad \text{(VII.11)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \right\} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2},
\end{aligned}
$$

was mit Hilfe der Produktregel über $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ sofort die Quotientenregel (VII.8) impliziert. □

Satz VII.5 (Kettenregel)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $g : U \to V$ differenzierbar bei $x_0 \in U$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $g(x_0) \in V$. Dann ist $[f \circ g] : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$, und es gilt*

$$
(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0). \qquad \text{(VII.12)}
$$

Beweis. (*Beweisidee*) Da g bei x_0 differenzierbar ist, ist g in x_0 auch stetig, und mit $x_n \to x_0$ konvergiert auch $g(x_n) \to g(x_0)$. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} \right\} \qquad \text{(VII.13)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \left(\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \right) \cdot \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right\} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \right\} \cdot \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Leider bereitet das Dividieren durch $g(x) - g(x_0)$ Schwierigkeiten, weil wir a priori nicht wissen, dass $g(x) - g(x_0) \neq 0$ gilt. Der volle Beweis ist daher formal etwas aufwändiger (aber ohne echte zusätzliche Schwierigkeiten). □

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $U := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$
f_n'(x) = n\, x^{n-1}. \qquad \text{(VII.14)}
$$

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $n = 0, 1$. $f_0(x) - f_0(x_0) = 1 - 1 = 0$, für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$, also gilt

$$f_0' \;=\; 0 \quad \big(= 0 \cdot x^{-1} \big). \tag{VII.15}$$

Weiterhin ist

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} \right\} \;=\; \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{x - x_0}{x - x_0} \right\} \;=\; 1, \tag{VII.16}$$

also

$$f_1'(x) \;=\; 1 \quad \big(= 1 \cdot x^0 \big). \tag{VII.17}$$

Gelte nun (VII.14) für alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Dann ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned} f_{N+1}'(x) \;&= (f_1 \cdot f_N)'(x) \;=\; f_1'(x) \cdot f_N(x) + f_1(x) \cdot f_N'(x) \\ &= 1 \cdot x^N + x \cdot N \cdot x^{N-1} \;=\; (N+1) \cdot x^N. \end{aligned} \tag{VII.18}$$

Somit folgt (VII.14) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion.

- Seien $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt wiederum

$$f_n'(x) \;=\; n\, x^{n-1}. \tag{VII.19}$$

Für $n < 0$ folgt dies aus der Quotientenregel,

$$\begin{aligned} f_n'(x) \;&=\; \left(\frac{f_0}{f_{-n}} \right)'(x) \;=\; \frac{1}{f_{-n}(x)^2} \Big(f_0'(x) \cdot f_{-n}(x) \;-\; f_0(x) \cdot f_{-n}'(x) \Big) \\ &= \frac{1}{x^{-2n}} \cdot \Big(0 \;-\; 1 \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} \Big) \;=\; n \cdot x^{n-1}. \end{aligned} \tag{VII.20}$$

- Sei $U = \mathbb{R}$, dann gilt

$$\big(e^x \big)' \;=\; e^x. \tag{VII.21}$$

Für $x \neq x_0$ ist nämlich

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \;=\; e^{x_0} \left(\frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \;-\; 1 \right) \;=\; e^{x_0} \Big(\frac{e^{x - x_0} - 1 - (x - x_0)}{x - x_0} \Big) \tag{VII.22}$$

und

$$\begin{aligned} \big| e^{x - x_0} - 1 - (x - x_0) \big| \;&\le\; \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!} \\ &\le |x - x_0|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^n}{n!} \;=\; |x - x_0|^2 \cdot e^{|x - x_0|}. \end{aligned} \tag{VII.23}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \right| \;&= e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e^{x - x_0} - 1 - (x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\le e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \big\{ |x - x_0| \cdot e^{|x - x_0|} \big\} \;=\; 0. \end{aligned} \tag{VII.24}$$

VII.2. Minima, Maxima und Mittelwertsatz

Definition VII.6. Seien $X \subseteq \mathbb{K}$ eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf X.

(i) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Minimum** von f $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \;\geq\; f(x_0). \tag{VII.25}$$

(ii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Minimum** von f $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \;\geq\; f(x_0). \tag{VII.26}$$

(iii) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **lokales Maximum** von f $:\Leftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \cap X : \qquad f(x) \;\leq\; f(x_0). \tag{VII.27}$$

(iv) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt **globales Maximum** von f $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X : \qquad f(x) \;\leq\; f(x_0). \tag{VII.28}$$

Satz VII.7. *Seien $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 ein I.P. von X und f bei $x_0 \in X$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\Big[x_0 \text{ ist ein lokales Maximum oder Minimum}\Big] \;\Rightarrow\; \Big[f'(x_0) \;=\; 0\Big]. \tag{VII.29}$$

Beweis. Wir beweisen (VII.29) nur im Fall, dass x_0 ein lokales Minimum ist (die Behandlung des Falls eines lokalen Maximums ist analog). Es gibt also ein $\delta' > 0$ so, dass

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \cap X : \quad f(x) \;\geq\; f(x_0). \tag{VII.30}$$

Weil $x_0 \in X$ ein I.P. ist, können wir durch Wahl eines genügend kleinen $0 < \delta \leq \delta'$ erreichen, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq X$ und daher sogar

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \quad f(x) \;\geq\; f(x_0) \tag{VII.31}$$

gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ seien nun $x_n^{(\pm)} := x_0 \pm \frac{\delta}{2n}$ definiert, sodass $(x_n^{(\pm)})_{n=1}^{\infty} \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}]^{\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ sind, die beide gegen x_0 konvergieren. Somit sind einerseits

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n^{(+)}) - f(x_0)}{x_n^{(+)} - x_0} \right\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{2n}{\delta}}_{>0} \cdot \underbrace{\big[f(x_n^{(+)}) - f(x_0)\big]}_{\geq 0} \right\} \;\geq\; 0 \tag{VII.32}$$

und andererseits

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x_n^{(-)}) - f(x_0)}{x_n^{(-)} - x_0} \right\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{-2n}{\delta}}_{<0} \cdot \underbrace{\big[f(x_n^{(-)}) - f(x_0)\big]}_{\geq 0} \right\} \;\leq\; 0, \tag{VII.33}$$

was zusammen $f'(x_0) = 0$ ergibt. □

Eine Anwendung dieses Satzes ist der nun folgende Mittelwertsatz.

Satz VII.8 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b)*. Dann gibt es einen Punkt* $x_0 \in (a, b)$*, so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; = \; f'(x_0). \tag{VII.34}$$

Beweis. Wir setzen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in [a, b] : \quad g(x) \; := \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \; - \; f(x). \tag{VII.35}$$

Dann ist auch g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b).

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Ist $g(x) \equiv c$ konstant auf $[a, b]$, so gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x) \; = \; g'(x) \; = \; 0, \tag{VII.36}$$

sogar für alle $x \in (a, b)$. (In diesem Fall ist nämlich der Graph von f eine Gerade.)

2. Sei g nicht konstant auf $[a, b]$. Weil $[a, b]$ kompakt und g stetig auf $[a, b]$ sind, nimmt g in $[a, b]$ sein Minimum und Maximum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, so dass

$$g(x_{\min}) \; = \; \inf\big\{g([a, b])\big\}, \quad g(x_{\max}) \; = \; \sup\big\{g([a, b])\big\}, \tag{VII.37}$$

und weil g nicht konstant ist, gilt

$$g(x_{\min}) \; < \; g(x_{\max}). \tag{VII.38}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} g(a) \; &= \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a \; - \; f(a) \; = \; \frac{f(b)a \; - \; bf(a)}{b - a} \\ &= \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b \; - \; f(b) \; = \; g(b). \end{aligned} \tag{VII.39}$$

Daher muss

$$\text{entweder:} \qquad x_{\max} \in (a, b) \qquad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \; = \; g(a) \; = \; g(b) \; < \; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.40}$$

$$\text{oder:} \qquad x_{\min} \in (a, b) \qquad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \; < \; g(a) \; = \; g(b) \; = \; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.41}$$

$$\text{oder (sogar):} \qquad x_{\min}, x_{\max} \in (a, b) \quad \text{und} \quad g\big(x_{\min}\big) \; < \; g(a) \; = \; g(b) \; < \; g\big(x_{\max}\big) \tag{VII.42}$$

gelten.

Gilt etwa (VII.41), so ist $x_{\min}$ ein innerer Punkt von (a,b) und ein lokales Minimum von g und deshalb nach Satz VII.7

$$0 = g'\big(x_{\min}\big) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'\big(x_{\min}\big), \tag{VII.43}$$

und $x_{\min}$ ist der gesuchte Punkt in (VII.34). Analog beweist man (VII.34) für (VII.40) und (VII.42). $\square$

Definition VII.9. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{l} \textbf{monoton steigend} \\ \textbf{streng monoton steigend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ in } U$$

$$:\Leftrightarrow \; \forall\, x, x' \in U,\; x < x' : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & \le & f(x') \\ f(x) & < & f(x') \\ f(x) & \ge & f(x') \\ f(x) & > & f(x') \end{array} \right. . \tag{VII.44}$$

Satz VII.10. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann gelten*

$$\left(\forall\, x \in (a,b) :\; f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \ge \\ > \\ \le \\ < \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \;\Rightarrow\; \left(f \;\textit{ist} \left\{ \begin{array}{c} \textit{monoton steigend} \\ \textit{streng monoton steigend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \\ \textit{konstant} \end{array} \right\} \textit{in } [a,b] \right). \tag{VII.45}$$

Beweis. Seien $x, x' \in [a,b]$ und $x < x'$. Dann ist die Einschränkung von f auf $[x,x']$ auch stetig auf $[x,x']$ und differenzierbar auf (x,x'). Nach dem Mittelwertsatz VII.5 gibt es also einen Punkt $x_0 \in (x,x')$, so dass

$$f(x') - f(x) \;=\; (x'-x) \cdot f'(x_0). \tag{VII.46}$$

Somit ist wegen $x' - x > 0$

$$\left(f'(x_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \\ = \end{array} \right\} 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \left(f(x) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \\ = \end{array} \right\} f(x') \right). \tag{VII.47}$$

$\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Umkehrung "$\Leftarrow$" gilt in (VII.45) im Allgemeinen nicht. So ist beispielsweise $f(x) := x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, aber $f'(0) = 0$.
- Es gilt aber eine etwas schwächere Aussage als Umkehrung von (VII.45), nämlich

$$\left(f \text{ ist} \begin{Bmatrix} \text{monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{konstant} \end{Bmatrix} \text{in } [a,b] \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\forall\, x \in (a,b) : \;\; f'(x) \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} 0 \right). \tag{VII.48}$$

VII.3. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Definition VII.11. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $n \in \mathbb{N}$.

(i) f ist **bei $\mathbf{x_0} \in \mathbf{U}$ n-mal differenzierbar**.

:$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta\, ,\, x_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned} &f \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'(x) := \tfrac{df}{dx}\,(x), \\ &f'(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f'](x), \\ &f''(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f'''(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f''](x), \\ &\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &f^{(n-2)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x \text{ und } f^{(n-1)}(x) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-2)}](x), \\ &f^{(n-1)}(x) \text{ ist differenzierbar bei } x_0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) := \tfrac{d}{dx}\,[f^{(n-1)}](x_0). \end{aligned} \tag{VII.49}$$

Wir schreiben die k. Ableitung auch als

$$\frac{d^k f}{dx^k}\,(x) \;:=\; f^{(k)}(x). \tag{VII.50}$$

(ii) f ist **auf U n-mal differenzierbar.**

:$\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist bei } x_0 \text{ n-mal differenzierbar.} \tag{VII.51}$$

Satz VII.12 (Taylor)**.** *Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf (a,b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ ein $x' \in (x, x_0)$ [falls $x < x_0$] bzw. $x' \in (x_0, x)$ [falls $x > x_0$], sodass*

$$f(x) \;=\; T_n[f, x_0; x] \;+\; R_{n+1}[f, x_0; x], \tag{VII.52}$$

wobei

$$T_n[f, x_0; x] \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(x - x_0)^k}{k!}\; f^{(k)}(x_0) \right\} \tag{VII.53}$$

$$= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\; f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\; f^{(n)}(x_0)$$

das ***Taylorpolynom*** $\mathbf{n}$***. Ordnung*** *und*

$$R_{n+1}[f,x_0;x] \;:=\; \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x') \tag{VII.54}$$

das ***Taylorsches Restglied*** $(\mathbf{n+1})$***. Ordnung*** *sind.*

Beweis. Wir können $x > x_0$ annehmen, der Beweis für $x < x_0$ ist analog. Für alle $t \in [x_0, x]$ setzen wir

$$p(t) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(t-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right\}, \tag{VII.55}$$

$$\lambda \;:=\; \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \, \big(f(x) - p(x) \big) \tag{VII.56}$$

und

$$g(t) \;:=\; f(t) - p(t) - \frac{\lambda}{(n+1)!}\,(t-x_0)^{n+1}. \tag{VII.57}$$

Beachte, dass für $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{d^\ell p(t)}{dt^\ell} \;&=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \; \frac{d^\ell\big[(t-x_0)^k\big]}{dt^\ell} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k \cdot \frac{d^{\ell-1}\big[(t-x_0)^{k-1}\big]}{dt^{\ell-1}} \\ &=\; \ldots \;=\; \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-\ell)!}\,(t-x_0)^{k-\ell}. \end{aligned} \tag{VII.58}$$

Somit ist

$$g^{(\ell)}(t) \;=\; f^{(\ell)}(t) \;-\; \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{f^{(m+\ell)}(x_0)}{m!}\,(t-x_0)^m \;-\; \frac{\lambda (t-x_0)^{n+1-\ell}}{(n+1-\ell)!}. \tag{VII.59}$$

Insbesondere sind

$$g(x_0) \;=\; f(x_0) - \frac{f(x_0)}{0!} + 0 - 0 \;=\; 0, \tag{VII.60}$$

$$g^{(1)}(x_0) \;=\; f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} + 0 - 0 \;=\; 0, \tag{VII.61}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x_0) \;=\; f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) \;=\; 0 \tag{VII.62}$$

und

$$g^{(n+1)}(t) \;=\; f^{(n+1)}(t) - \lambda. \tag{VII.63}$$

Nach Wahl von λ in (VII.56) folgt außerdem $g(x) = 0$, also

$$g(x_0) \;=\; g(x) \;=\; 0. \tag{VII.64}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_1 \in (x_0, x)$, so dass $g'(x_1) = 0$. Also gilt

$$g'(x_0) \;=\; g'(x_1) \;=\; 0, \tag{VII.65}$$

und der Mittelwertsatz impliziert abermals die Existenz eines $x_2 \in (x_0, x_1)$ mit $g''(x_2) = 0$, also

$$g''(x_0) \;=\; g''(x_2) \;=\; 0, \tag{VII.66}$$

und damit wieder $g'''(x_3) = 0$ für ein gewisses $x_3 \in (x_0, x_2)$ u.s.w. Schließlich erhalten wir ein $x_{n+1} \in (x_0, x_n) \subseteq (x_0, x_{n-1}) \subseteq \ldots \subseteq (x_0, x)$ mit

$$0 \;=\; g^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) \;=\; f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big) - \lambda, \tag{VII.67}$$

also

$$f(x) \;=\; p(x) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}\big(x_{n+1}\big), \tag{VII.68}$$

und $x_{n+1} \in (x_0, x)$ ist der gesuchte Punkt x'. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt mit $f(x) := e^x$

$$f^{(n+1)}(x) \;=\; f^{(n)}(x) \;=\; \ldots \;= f'(x) \;=\; f(x) \;=\; e^x, \tag{VII.69}$$

  und insbesondere

$$f(0) \;=\; f'(0) \;=\; f''(0) \;=\; f^{(n)}(0) \;=\; 1. \tag{VII.70}$$

  Also ist

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \left| e^x - \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right\} \right| \;\le\; \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{|x|}, \tag{VII.71}$$

  denn für $x' \in (-x, x)$ ist $e^{x'} \le e^{|x|}$.
- Für $x = 1$ und $n = 10$ erhält man

$$\left| e - \left\{ 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} \right\} \right| \;=\; \big| e - (2,718281801) \big| \;\le\; \frac{e}{11!} \;\le\; e \cdot 0,000002505, \tag{VII.72}$$

  also

$$2,71827 \;\le\; \frac{2,718281801}{1,000002505} \;\le\; e \;\le\; \frac{2,718281801}{0,999997495} \;\le\; 2,71829. \tag{VII.73}$$

- Sei folgende Aufgabe gestellt: *Berechne* $\sin(\frac{1}{10})$ *mit einer Genauigkeit von mindestens* 10^{-6}.

Dazu wenden wir Satz VII.12 von Taylor auf $f(x) = \sin(x)$ mit $a = -\infty$, $b = \infty$ und $x_0 := 0$ an und berechnen die Ableitungen von f,

$$f^{(0)}(x) = \sin(x), \quad f^{(1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(2)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \tag{VII.74}$$

u.s.w. Insbesondere sind dann

$$f^{(0)}(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \ \ldots \tag{VII.75}$$

und wir erhalten

$$T_6[\sin, 0; x] = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{VII.76}$$

sowie

$$R_7[\sin, 0; x] = \frac{-\cos(x')}{7!}x^7. \tag{VII.77}$$

Wegen $|\cos(x')| \leq 1$ ist nach dem Satz VII.12 von Taylor dann für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\left| \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| = |R_7[\sin, 0; x]| \leq \frac{|x|^7}{7!} = \frac{|x|^7}{5040}. \tag{VII.78}$$

Wählen wir $x = \frac{1}{10}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| \sin(\tfrac{1}{10}) - \big(0,1 - 0,0001\bar{6} + 0,00000008\bar{3}\big) \right| \\ &\qquad = \left| \sin(\tfrac{1}{10}) - (0,09983341\bar{6}) \right| \leq \frac{10^{-7}}{5000} = 2 \cdot 10^{-11}, \end{aligned} \tag{VII.79}$$

d.h. mit nur drei Termen approximieren wir die Sinusfuktion von $\frac{1}{10}$ sogar mit einer Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-11}$!

- Setzen wir in (VII.53) $n = \infty$, so erhalten wir $f(x)$ *formal* aus einer Potenzreihe um x_0, der Taylorreihe,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{VII.80}$$

Für viele Funktionen kann man die Konvergenz dieser Reihe durch Abschätzung der Taylorschen Restglieder in beliebig hoher Ordnung gewinnen. Aus (VII.71) sieht man, dass dies z.B. für $f(x) = e^x$ gelingt, und in der Tat ist die e^x definierende Potenzreihe V.6 gerade die Taylorreihe um $x_0 = 0$.

- Es gibt aber auch viele Funktionen, für die (VII.80) falsch ist. Betrachten wir z.B.

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{VII.81}$$

so ist $f(x) > 0$, für $x \neq 0$, aber

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \quad f^{(n)}(0) \;=\; 0, \tag{VII.82}$$

d.h. die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \equiv 0, \tag{VII.83}$$

verschwindet identisch. Damit konvergiert die Taylorreihe von f zwar, hat jedoch mit der Funktion f nichts zu tun!

- Eine Anwendung der Taylorschen Formel (VII.52) ist die Kurvendiskussion.

  Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so verschwindet zwar bei lokalem Maximum oder Minimum die Ableitung f', es ist aber noch nicht klar, wie man entscheiden kann, ob es sich auch wirklich um ein Maximum oder Minimum handelt. Dies lässt sich erst bei Betrachtung der höheren Ableitungen sagen; Darüber gibt Satz VII.13 Auskunft.

Satz VII.13. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf U n-mal differenzierbare Abbildung. Sei weiterhin $x_0 \in U$, und gelte*

$$f'(x_0) \;=\; f''(x_0) \;=\; \ldots \;= f^{(n-1)}(x_0) \;=\; 0,\; f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{VII.84}$$

und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0. Dann liegt folgende Situation lokal bei x_0 vor:

- *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum;*
- *Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum;*
- *Ist n ungerade, so ist x_0 ein Wendepunkt von f.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass für gerades $n = 2k \geq 2$, also $k \in \mathbb{N}$ und $f^{(2k)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum vorliegt. Seien $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $0 < \delta \ll 1$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein x' mit $|x' - x_0| \leq |x - x_0|$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) \;&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{2k-1}}{(2k-1)!}\, f^{(2k-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k)}(x') \\ &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k)}(x'). \end{aligned} \tag{VII.85}$$

Da $f^{(2k)}$ in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta' > 0$, so dass

$$\forall\, |x' - x_0| < \delta' : \quad \left| f^{(2k)}(x') - f^{(2k)}(x_0) \right| \;\leq\; \frac{1}{2}\, f^{(2k)}(x_0), \tag{VII.86}$$

für $|x' - x_0| < \delta'$ also

$$f^{(2k)}(x') \;\geq\; f^{(2k)}(x_0) - \left| f^{(2k)}(x) - f^{(2k)}(x_0) \right| \;\geq\; \frac{1}{2}\, f^{(2k)}(x_0) > 0. \tag{VII.87}$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x' - x_0| < \min\{\delta, \delta'\}$ auch

$$f(x) \;\geq\; f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{2k}}{(2k)!}\, \frac{f^{(2k)}(x_0)}{2} \;\geq\; f(x_0). \tag{VII.88}$$

□

VII.4. Ergänzungen

VII.4.1. Beweis der Kettenregel

Beweis. (Beweis von Satz VII.5) Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es gemäß Lemma VII.2 ein $\beta > 0$, so dass, für alle $y \in V$ mit $|y - g(x_0)| \leq \beta$ auch

$$\Big| f(y) - \big\{ f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) \big\} \Big| \;\leq\; \alpha_i |y - g(x_0)| \tag{VII.89}$$

gilt. Wir setzen $\gamma := \min\{\beta, \alpha, 1\} > 0$. Weiterhin gibt es zu $\gamma > 0$ ein $\eta > 0$, so dass, für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| \leq \eta$ auch

$$\Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \;\leq\; \gamma |x - x_0| \tag{VII.90}$$

gilt. Wir setzen

$$\kappa \;:=\; \min \Big\{ \eta, \frac{\gamma}{|g'(x_0)| + \gamma} \Big\} > 0. \tag{VII.91}$$

Dann gilt für alle $|x - x_0| \leq \kappa$:

$$\Big| g(x) - g(x_0) \Big| \;\leq\; \Big(|g'(x_0)| + \beta \Big) |x - x_0| \;\leq\; \gamma, \tag{VII.92}$$

also auch

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \\ &\qquad \leq \Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[g(x_0)] \cdot (g(x_0) - g(x_0)) \big\} \Big| \\ &\qquad\quad + \; \Big| f'[g(x_0)] \Big| \cdot \Big| g(x) - \big\{ g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big|, \end{aligned} \tag{VII.93}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'(g(x_0)] g'(x_0)(x - x_0) \big\} \Big| \\ &\quad \leq \alpha |g(x) - g(x_0)| \;+\; \gamma |x - x_0| \;\leq\; \Big[\alpha |g'(x_0)| \;+\; \alpha\gamma + \gamma \Big] \cdot |x - x_0| \\ &\quad \leq \alpha \Big(|g'(x_0)| + 2 \Big) \cdot |x - x_0|, \end{aligned} \tag{VII.94}$$

da $\gamma \leq \min\{1, \alpha\}$.

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir $\alpha := \varepsilon \cdot \big(|g'(x_0)| + 2 \big)^{-1}$ und anschließend β, γ, η, und $\kappa =: \delta > 0$, wie in (VII.89)–(VII.91). Somit gilt für alle $|x - x_0| \leq \delta$:

$$\Big| f[g(x)] - \big\{ f[g(x_0)] + f'[(g(x_0)] \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \big\} \Big| \;\leq\; \varepsilon \cdot |x - x_0|. \tag{VII.95}$$

$\square$

VII.4.2. Zwischenwertsatz für die Ableitung

Für eine differenzierbare Funktion f ist die Ableitung f' im Allgemeinen nicht stetig, es gilt aber die folgende Aussage:

Lemma VII.14. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Seien $x, x' \in (a,b)$ mit $x < x'$, und $f'(x) < f'(x')$. Dann gibt es für jedes $f'(x) < \lambda < f'(x')$ ein $x < t < x'$, so dass $f'(t) = \lambda$.*

Beweis. Wir setzen

$$\forall\, x < t < x' : \quad g(t) := f(t) - \lambda \cdot t, \tag{VII.96}$$

so dass,

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \lambda < 0, \quad g'(x') \;=\; f'(x') - \lambda > 0. \tag{VII.97}$$

Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall\, t \in (x, x+\delta) : \qquad g(x) > g(t), \tag{VII.98}$$

$$\forall\, t \in (x'-\delta, x') : \qquad g(t) < g(x'). \tag{VII.99}$$

Somit muss g in (x, x') ein lokales Minimum haben, d.h.

$$\exists\, t \in (x, x') : \quad 0 \;=\; g'(t) \;=\; f'(x) - \lambda. \tag{VII.100}$$

□

VII.4.3. $0/0$ und ∞/∞ – Der Satz von L'Hospital

Satz VII.15 (L'Hospital). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in U$ ein innerer Punkt und $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in U$. Seien weiterhin*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \quad \forall\, 0 < |x - x_0| \leq \delta :\; g(x) \neq 0 \tag{VII.101}$$

für ein gewisses $\delta > 0$, und $g'(x_0) \neq 0$. Dann lässt sich $f(x)/g(x)$ stetig in x_0 fortsetzen mit

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \;=\; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{VII.102}$$

Beweis. Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \;\leq \alpha |x - x_0|, \tag{VII.103}$$

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \;\leq \alpha |x - x_0|. \tag{VII.104}$$

Ist $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}|g'(x_0)|$, so gilt auch insbesondere

$$|g(x)| \;\geq\; \big(|g'(x_0)| - \alpha\big)|x - x_0| \;\geq\; \frac{g'(x_0)}{2}\,|x - x_0| \;>\; 0, \tag{VII.105}$$

für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$. Damit erhalten wir

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| = \left|\frac{\big(f'(x_0) + \alpha_f(x)\big)(x - x_0)}{\big(g'(x_0) + \alpha_g(x)\big)(x - x_0)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right|, \tag{VII.106}$$

wobei $|\alpha_f(x)|,\ |\alpha_g(x)| \leq \alpha$ sind. Also ist, für alle $0 < |x - x_0| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| &= \left|\frac{f'(x_0) + \alpha_f(x)}{g'(x_0) + \alpha_g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \\ &= \frac{1}{|g'(x_0)| \cdot |g'(x_0) + \alpha_g(x)|} \cdot \big|\alpha_f(x) \cdot g'(x_0) - \alpha_g(x) \cdot f'(x_0)\big| \\ &\leq \frac{2\alpha}{|g'(x_0)|^2} \big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big). \end{aligned} \tag{VII.107}$$

Ist nun $\varepsilon < 0$ vorgegeben, so wählen wir

$$\alpha := \frac{|g'(x_0)|^2}{2\big(|g'(x_0)| + |f'(x_0)|\big)} \cdot \min\{\varepsilon, 1\} > 0, \tag{VII.108}$$

und beobachten, dass $\alpha \leq |g'(x_0)|/2$. Also ist,

$$\forall\, 0 < |x - x_0| \leq \delta : \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right| \leq \varepsilon \tag{VII.109}$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{VII.110}$$

□