VI. Stetigkeit

VI.1. Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Definition VI.1.

(i) Für alle $x \in \mathbb{K}$ und $r > 0$ heißt

$$B_{\mathbb{K}}(x, r) := \Big\{ y \in \mathbb{K} \,\Big|\, |y - x| < r \Big\} \tag{VI.1}$$

offene Kugel vom Radius *r* um *x*.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.) von *A***

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists r > 0 : \quad B_{\mathbb{K}}(x, r) \subseteq A. \tag{VI.2}$$

(iii) Sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von *D***

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall r > 0 : \quad B_{\mathbb{K}}(x, r) \cap \big(D \setminus \{x\}\big) \neq \emptyset \tag{VI.3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall r > 0 \; \exists y \in D, \; y \neq x : \qquad |y - x| < r.$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist $B_{\mathbb{R}}(x, r) = (x - r, x + r)$ das *offene Intervall der Länge* $2r$ *um* x.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnet man $B_{\mathbb{C}}(z, r) \equiv D(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$ als *offene Kreisscheibe vom Radius* r *um* z.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, sind

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist H.P. von } [a, b]\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist H.P. von } (a, b)\}, \tag{VI.4}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist I.P. von } [a, b]\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist I.P. von } (a, b)\}. \tag{VI.5}$$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ist die Menge der inneren Punkte leer, und 0 ist der einzige Häufungspunkt von A.

Definition VI.2.

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt **offen**

$$:\Leftrightarrow \quad \text{Jeder Punkt in } A \text{ ist ein I.P. oder } A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in A \; \exists r > 0 : \quad B_{\mathbb{K}}(x, r) \subseteq A. \tag{VI.6}$$

(ii) Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ heißt **abgeschlossen**

$$:\Leftrightarrow \quad D \text{ enthält alle seine H.P. oder } D = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{K}: \quad \big(x \text{ ist H.P. von } D \;\Rightarrow\; x \in D\big). \tag{VI.7}$$

(iii) Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{K}$ heißt **beschränkt**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists R < \infty: \quad C \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, R). \tag{VI.8}$$

(iv) Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{K}$ heißt **kompakt**

$$:\Leftrightarrow \quad K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.} \tag{VI.9}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$ und $\emptyset \subseteq \mathbb{K}$ sind stets sowohl offen als auch abgeschlossen. Es gibt also Mengen, die beide Eigenschaften besitzen.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, ist (a, b) offen und nicht abgeschlossen, hingegen ist $[a, b]$ abgeschlossen und nicht offen.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, sind $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ und $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ weder offen noch abgeschlossen. Es gibt also Mengen, die keine der beiden Eigenschaften besitzen.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$, ist $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt, da $[a, b] \subseteq (-R, R) = B_{\mathbb{R}}(0, R)$ mit $R := |a| + |b| + 1$. Also ist $[a, b]$ kompakt.

Satz VI.3. *Für $A \subseteq \mathbb{K}$ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

$$A \text{ ist offen} \quad \Leftrightarrow \quad A^c := \mathbb{K} \setminus A \text{ ist abgeschlossen.} \tag{VI.10}$$

Lemma VI.4.

(i) Sind $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{K})$ eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch ihre Vereinigung

$$\bigcup_{j \in J} A_j \quad \text{offen.} \tag{VI.11}$$

(ii) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_N \subseteq \mathbb{K}$ endliche viele offene Teilmengen von $\mathbb{K}$, so ist auch ihr Durchschnitt

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N \quad \text{offen.} \tag{VI.12}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Glg. (VI.12) ist im Allgemeinen für den Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen nicht richtig. Sind beispielsweise $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, für $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ nicht offen.

VI.2. Stetige Abbildungen

Definition VI.5. Seien $U \subseteq \mathbb{K}$, $U \neq \emptyset$ eine nichtleere Teilmenge reeller oder komplexer Zahlen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{K}$ eine Abbildung.

(i) f heißt **stetig in $\boldsymbol{x_0}$**

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U \cap B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) : \quad f(x) \in B_{\mathbb{K}}\big(f(x_0), \varepsilon\big). \tag{VI.13}$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U,\ |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) f heißt **stetig auf $\boldsymbol{U}$** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x_0 \in U : \quad f \text{ ist stetig in } x_0. \tag{VI.14}$$

(iii) Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ y \quad :\Leftrightarrow \tag{VI.15}$$
$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \in (U \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0 : \quad \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = y\,.$$

Bemerkungen und Beispiele.

Für $U = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$:

- Polynome $p(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$,
- trigonometrische Funktionen $\sin(x), \cos(x)$,
- die Exponentialfunktion e^x.

(Begründungen kommen erst später.)

Satz VI.6. *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$, $U \neq \emptyset$ eine nichtleere Teilmenge reeller oder komplexer Zahlen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

$$\Big[f \textit{ ist stetig in } x_0 \in U\Big] \ \Leftrightarrow\ \Big[\lim_{x\to x_0}\{f(x)\} = f(x_0)\Big]. \tag{VI.16}$$

*In diesem Fall nennt man die Eigenschaft $\lim_{x\to x_0}\{f(x)\} = f(x_0)$ **Folgenstetigkeit von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x_0}$**.*

Beweis.
<u>“$\Rightarrow$”:</u> Seien $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U^{\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $x_n \to x_0$ und $\varepsilon > 0$. Nach (VI.13) gibt es ein $\delta > 0$, so dass mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Da $x_n \to x_0$ konvergiert, gibt es zu obigem $\delta > 0$ auch ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |x_n - x_0| < \delta, \tag{VI.17}$$

und daher gilt auch

$$\forall\, n \geq n_0 : \quad |f(x_n) - f(x_0)| \ < \ \varepsilon. \tag{VI.18}$$

Zusammenfassend erhalten wir somit

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \quad |f(x_n) - f(x_0)| \; < \; \varepsilon, \tag{VI.19}$$

was gerade $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = f(x_0)$ bedeutet.

<u>"$\Leftarrow$":</u> Sei f nicht stetig in x_0, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in U, \; |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{VI.20}$$

Sei $\varepsilon > 0$ nun eine solche Zahl. Setzen wir $\delta := 1/n$, so gibt es gemäß (VI.20) ein $x_n \in U$ mit $|x - x_0| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge in $\mathbb{K}$ mit $x_n \to x_0$, weil $|x_n - x_0| < 1/n$. Andererseits ist aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0$, und die Zahlenfolge $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$. ◻

Satz VI.7. *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$, $f, g : U \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.*

(i) Dann sind auch $f + \alpha g, f \cdot g : U \to \mathbb{K}$ stetig in x_0, und es gelten

$$\lim_{x\to x_0} \big\{f(x) + \alpha\, g(x)\big\} \; = \; \lim_{x\to x_0} \big\{f(x)\big\} + \alpha \lim_{x\to x_0} \big\{g(x)\big\} \; = \; f(x_0) + \alpha\, g(x_0). \tag{VI.21}$$

$$\lim_{x\to x_0} \big\{f(x) \cdot g(x)\big\} \; = \; \lim_{x\to x_0} \big\{f(x)\big\} \cdot \lim_{x\to x_0} \big\{g(x)\big\} \; = \; f(x_0) \cdot g(x_0). \tag{VI.22}$$

(ii) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall x \in U \cap B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) : \quad |g(x)| \; \geq \; \frac{1}{2}|g(x_0)| \; \geq \; 0. \tag{VI.23}$$

Weiterhin ist die Abbildung $f/g : U \cap B_{\mathbb{K}}(x_0, \delta) \to \mathbb{K}$ stetig in x_0, und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \; = \; \frac{\lim_{x\to x_0}\big\{f(x)\big\}}{\lim_{x\to x_0}\big\{g(x)\big\}} \; = \; \frac{f(x_0)}{g(x_0)}. \tag{VI.24}$$

Beweis. Folgt direkt aus den Sätzen VI.6, IV.2 und IV.3. ◻

Satz VI.8. *Seien $U \subseteq \mathbb{K}$, $U \neq \emptyset$, und $g : U \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in U$. Seien weiterhin $V := g(U) \subseteq \mathbb{K}$ und $f : V \to \mathbb{K}$ stetig in $g(x_0) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in U$, und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \big\{f\big(g(x)\big)\big\} \; = \; f\big(g(x_0)\big). \tag{VI.25}$$

Beweis. Auch dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz VI.6. ◻

Bemerkungen und Beispiele.

- Offensichtlich sind $f_0(x) = 1$ und $f_1(x) = x$ stetige Funktionen auf $\mathbb{K}$. Die Stetigkeit eines Polynoms

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_N x^N \\ &= \big(c_0 \cdot f_0 + c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot [f_1]^2 + \ldots + c_N \cdot [f_1]^N\big)[x] \end{aligned} \tag{VI.26}$$

  folgt nun aus Satz VI.7.

- Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $z \in D(z_0, 1)$. Dann ist

$$\left|e^z - e^{z_0}\right| = \left|e^{z-z_0} - 1\right| \cdot \left|e^{z_0}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}\right| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{n!}\right| \tag{VI.27}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right) = |z-z_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{(k+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right)$$

$$\leq |z-z_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}\right) \leq |z-z_0|\, e^{|z-z_0|}\, e^{|z_0|} \leq |z-z_0|\, e^{|z_0|+1}.$$

  Somit ist $\lim_{z \to z_0}\{e^z\} = e^{z_0}$, für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

- Mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $g(z) = -z^2$ und $f(w) = e^w$ folgt aus der Stetigkeit von f und g auf $\mathbb{C}$ folgt mit Satz VI.8 auch die Stetigkeit von $(f \circ g)[z] = \exp[-z^2]$ auf $\mathbb{C}$.

VI.3. Erhaltung topologischer Eigenschaften durch stetige Funktionen

Satz VI.9. *Sei $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Dann sind folgende drei Aussagen gleichwertig:*

$$f \text{ ist stetig auf } \mathbb{K}; \tag{VI.28}$$

$\Leftrightarrow$ *Ist $V \subseteq \mathbb{K}$ offen, so ist auch das Urbild $f^{-1}[V]$ offen, d.h.*

$$\big\{V \subseteq \mathbb{K} \text{ ist offen} \;\Rightarrow\; f^{-1}[V] = \{x \in \mathbb{K} | f(x) \in V\} \text{ ist offen}\big\}; \tag{VI.29}$$

$\Leftrightarrow$ *Ist $V \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossen, so ist auch das Urbild $f^{-1}[V]$ abgeschlossen, d.h.*

$$\big\{V \subseteq \mathbb{K} \text{ ist abgeschlossen} \;\Rightarrow\; f^{-1}[V] = \{x \in \mathbb{K} | f(x) \in V\} \text{ ist abgeschlossen}\big\}. \tag{VI.30}$$

Satz VI.10. *Sind $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine auf $\mathbb{K}$ stetige Abbildung und $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, so ist auch die Bildmenge $f(K) := \{f(x) | x \in K\}$ von K kompakt.*

Korollar VI.11. *Sind $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{K}$ stetige Abbildung und $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, so gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in K$, so dass*

$$f\big(x_{\min}\big) = \inf\{f(K)\} \quad \textit{und} \quad f\big(x_{\max}\big) = \sup\{f(K)\}. \tag{VI.31}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für Korollar VI.11 hat sich auch folgende Sprechweise eingebürgert:
  Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Maximum und Minimum an.

- Außerdem schreibt man in dem Fall, dass für $A \subseteq \mathbb{R}$ auch $\inf\{A\} \in A$ bzw. $\sup\{A\} \in A$ gilt,

$$\inf\{A\} =: \min\{A\} \quad \text{und} \quad \sup\{A\} =: \max\{A\}. \tag{VI.32}$$

- Sind $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^+$ stetig auf K, so ist

$$\inf\{f(K)\} = \min\{f(K)\} > 0. \tag{VI.33}$$

- Für $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{-x}$, ist $U := \mathbb{R}_0^+$ nicht kompakt, und daher überrascht es auch nicht, dass

$$\inf\{f(U)\} = 0 \notin f(U). \tag{VI.34}$$

- Für $a > 0$ ist $K := [0, a]$ kompakt, und mit $f : K \to \mathbb{R}_0^+$ und $f(x) = e^{-x}$ gilt

$$\inf\{f(K)\} = \min\{f(K)\} = e^{-a} \in f(K). \tag{VI.35}$$