

IV. Folgen und Konvergenz

IV.1. Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir erinnern an den Begriff der Zahlenfolge, den wir schon im Kapitel I eingeführt haben. Im Allgemeinen ist eine **Folge** $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A^{\mathbb{N}}$ in A eine Abbildung $a_{(\cdot)} : \mathbb{N} \rightarrow A$, $n \mapsto a_n$. Folgen mit Werten in $A \subseteq \mathbb{K}$ nennen wir **Zahlenfolgen**.

Definition IV.0.1.

(i) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{K} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.1})$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** oder **Limes** von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, und wir schreiben statt (IV.1) auch abkürzend

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.2})$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = a. \quad (\text{IV.3})$$

(ii) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt **divergent** $:\Leftrightarrow$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist nicht konvergent.} \quad (\text{IV.4})$$

(iii) Enthält eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, so heißt deren Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \{a_{n_k}\}$ **Häufungswert** von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir bemerken, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig ist. Ist nämlich

$$a_n \rightarrow a \quad \text{und} \quad a_n \rightarrow a', \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.5})$$

so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Indizes $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon, \quad (\text{IV.6})$$

$$\forall n \geq n'_0 : |a_n - a'| \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.7})$$

Für $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ ist demnach

$$|a - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| \leq 2\varepsilon. \quad (\text{IV.8})$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus

$$a = a'. \quad (\text{IV.9})$$

- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := 1/n$. Dann konvergiert $a_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent und hat die Häufungswerte $\{-1, 1\}$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \alpha + \frac{1}{n} + i\beta - \frac{i}{n}$. Dann konvergiert $a_n \rightarrow \alpha + i\beta$, für $n \rightarrow \infty$.
- Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n := \cos(n) + i \sin(n)$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ divergent.
- Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$ in \mathbb{K} ist auch **beschränkt**. Genauer gesagt, ist dann die Menge $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ der Folgeglieder beschränkt, d.h.

$$\exists R < \infty \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq R. \quad (\text{IV.10})$$

Ist nämlich $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, so können wir $\varepsilon := 1$ in (IV.1) wählen und erhalten ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1. \quad (\text{IV.11})$$

Also gilt (IV.10) mit

$$R := \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\} < \infty. \quad (\text{IV.12})$$

- Die Konvergenz von komplexen Folgen ist gleichbedeutend mit der Konvergenz ihres Real- und Imaginärteils,

$$(z_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow (\text{Re}\{z_n\})_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ und } (\text{Im}\{z_n\})_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ sind beide konvergent.} \quad (\text{IV.13})$$

Ist nämlich $|z_n - z| = \sqrt{\text{Re}\{z_n - z\}^2 + \text{Im}\{z_n - z\}^2} \leq \varepsilon$, so sind auch $|\text{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\text{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$.

Sind umgekehrt $|\text{Re}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$ und $|\text{Im}\{z_n - z\}| \leq \varepsilon$, so ist $|z_n - z| \leq \sqrt{2}\varepsilon$.

Satz IV.1. Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ zwei konvergente Zahlenfolgen und

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}, \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}. \quad (\text{IV.14})$$

Dann sind auch $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ und $(\alpha a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n + b_n\} = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}, \quad (\text{IV.15})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\alpha a_n\} = \alpha a = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}. \quad (\text{IV.16})$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\varepsilon/(2 + |\alpha|) > 0$. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n'_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq n'_0 : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|}, \quad (\text{IV.17})$$

und weil $(b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent ist, gibt es $n''_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq n''_0 : |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{IV.18})$$

Setzen wir nun

$$n_0 := \max\{n'_0, n''_0\}, \quad (\text{IV.19})$$

dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2 + |\alpha|} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

und

$$|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha| \cdot |a_n - a| \leq \frac{|\alpha| \cdot \varepsilon}{2 + |\alpha|} \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.21})$$

□

Satz IV.2. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ zwei konvergente Zahlenfolgen und

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}, \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}. \quad (\text{IV.22})$$

Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}. \quad (\text{IV.23})$$

Sind außerdem $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so ist auch $(a_n/b_n)_{n=1}^\infty$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\}}. \quad (\text{IV.24})$$

IV.2. Reelle Folgen und Monotonie

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass der Konvergenzbegriff in \mathbb{C} auf den in \mathbb{R} zurückgeführt werden kann. Aus der Ordnungsstruktur in \mathbb{R} erhalten wir allerdings noch weitere Aussagen, die keine Entsprechung in \mathbb{C} haben.

Definition IV.2.1. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$

$$\text{heißt } \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton steigend} \\ \text{streng monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\} : \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1}, \\ a_n < a_{n+1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \\ a_n > a_{n+1}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.25})$$

Satz IV.3. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R} .

$$(i) \quad \text{Ist } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ nach oben beschränkt und monoton steigend,} \\ \text{so ist } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergent.} \quad (\text{IV.26})$$

$$(ii) \quad \text{Ist } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ nach unten beschränkt und monoton fallend,} \\ \text{so ist } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ konvergent.} \quad (\text{IV.27})$$

Beweis. Offensichtlich sind (i) und (ii) äquivalent, wie man aus Ersetzung von a_n durch $-a_n$ ersieht. Wir zeigen nur (i). Die Menge $A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ist nach oben beschränkt, und wir setzen

$$a := \sup A. \quad (\text{IV.28})$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Weil a das Supremum von A ist, gibt es nach Lemma II.2 ein $a_{n_0} \in A$, so dass

$$a_{n_0} \leq a \leq a_{n_0} + \varepsilon. \quad (\text{IV.29})$$

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_{n_0} \leq a_n$ für $n \geq n_0$, und daher

$$\forall n \geq n_0: \quad 0 \leq a - a_n \leq a - a_{n_0} \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.30})$$

Also ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = a$. □

Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in [-R, R]^\mathbb{N}$ eine nach oben und unten durch $\pm R$, $0 < R < \infty$ beschränkte Folge. Setzen wir

$$A_m := \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}, \quad (\text{IV.31})$$

so gilt

$$[-R, R] \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad (\text{IV.32})$$

Setzen wir weiter, für $m \in \mathbb{N}$,

$$b_m := \inf A_m \quad \text{und} \quad c_m := \sup A_m, \quad (\text{IV.33})$$

so gilt

$$\forall m \in \mathbb{N}: \quad -R \leq b_m \leq c_m \leq R. \quad (\text{IV.34})$$

Außerdem impliziert (IV.31)-(IV.32), dass

$$b_m = \inf A_m = \min \{a_m, \inf A_{m+1}\} \leq \inf A_{m+1} = b_{m+1}, \quad (\text{IV.35})$$

$$c_m = \sup A_m = \max \{a_m, \sup A_{m+1}\} \geq \sup A_{m+1} = c_{m+1}. \quad (\text{IV.36})$$

Also sind beide Folgen, $(b_m)_{m=1}^\infty$ und $(c_m)_{m=1}^\infty$, beschränkt und monoton und daher auch konvergent in \mathbb{R} .

Definition IV.3.1. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R} .

(i.a) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, dann setzen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := \infty. \quad (\text{IV.37})$$

(Dabei ist “ ∞ ” nur als Symbol zu verstehen. $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.)

(i.b) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$, nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := -\infty. \quad (\text{IV.38})$$

(i.c) Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt, und ist $(c_m)_{m=1}^\infty$, mit $c_m := \sup\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$, nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := \lim_{m \rightarrow \infty} \{c_m\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \sup\{a_n \mid n \geq m\} \}. \quad (\text{IV.39})$$

(ii)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} := -\limsup_{n \rightarrow \infty} \{-a_n\}. \quad (\text{IV.40})$$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ heißt **Limes superior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$,
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ heißt **Limes inferior** von $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Sei $a_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nicht nach oben beschränkt, und es gilt (i.a), also $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \infty$.
- Sei $a_n := -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ nach oben beschränkt. Weiterhin ist $c_m = \sup\{-m, -m-1, -m-2, \dots\} = -m$, deshalb ist $(c_m)_{m=1}^\infty$ nicht nach unten beschränkt, und es gilt (i.b), also $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -\infty$.
- Sei $a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Wegen $-2 \leq a_n \leq 2$ ist dann $(a_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt, und es gilt (i.c). Weiterhin ist

$$c_{2k-1} = \sup \left\{ -\left(\frac{2k}{2k-1}\right), +\left(\frac{2k+1}{2k}\right), -\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right), +\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right), \dots \right\} = \frac{2k+1}{2k}, \quad (\text{IV.41})$$

$$c_{2k} = \sup \left\{ \frac{2k+1}{2k}, \frac{-2k-2}{2k+1}, \frac{2k+2}{2k+1}, \dots \right\} = \frac{2k+1}{2k},$$

also $c_m \rightarrow 1$, für $m \rightarrow \infty$, und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 1$.

- Genauso sieht man, dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -1$ für $a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Wir beobachten, dass -1 und 1 Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ sind.
- Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dann sind $\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 0$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 1$.

Satz IV.4. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine Folge in \mathbb{R} .

(i) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} =: \bar{a} \in \mathbb{R} \text{ existiert} \right\} \quad (\text{IV.42})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq \bar{a} + \varepsilon \quad \text{und} \\ \forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : a_n \geq \bar{a} - \varepsilon \end{array} \right\} \quad (\text{IV.43})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist nach oben beschränkt und } \bar{a} \text{ ist ihr größter Häufungswert} \right\}. \quad (\text{IV.44})$$

(ii) Folgende Charakterisierungen sind gleichwertig:

$$\left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} =: \underline{a} \in \mathbb{R} \text{ existiert} \right\} \quad (\text{IV.45})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \geq \underline{a} - \varepsilon \quad \text{und} \\ \forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : a_n \leq \underline{a} + \varepsilon \end{array} \right\} \quad (\text{IV.46})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist nach unten beschränkt und } \underline{a} \text{ ist ihr kleinster Häufungswert} \right\}. \quad (\text{IV.47})$$

Korollar IV.5. Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{R} .

$$\left[(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R} \right] \Leftrightarrow \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \in \mathbb{R} \right], \quad (\text{IV.48})$$

und in diesem Fall gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}. \quad (\text{IV.49})$$

IV.3. Cauchy-Folgen

Definition IV.5.1. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.50})$$

Cauchy-Folgen spielen in der Analysis eine große Rolle, weil man mit ihrer Hilfe den Konvergenzbegriff einführen kann, ohne expliziten Bezug auf den Grenzwert zu nehmen.

Lemma IV.6. Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon/2. \quad (\text{IV.51})$$

Also ist

$$\forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \varepsilon. \quad (\text{IV.52})$$

□

Satz IV.7 (Cauchy-Kriterium). *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Cauchy-Folge, so ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine reelle Cauchy-Folge. Wählen wir $\varepsilon := 1$, dann gibt es nach (IV.50) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass (mit $m := n_0$)

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| \leq 1. \quad (\text{IV.53})$$

Also ist

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| \leq |a_{n_0}| + 1, \quad (\text{IV.54})$$

und daher

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}, \quad (\text{IV.55})$$

d.h. $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist nach oben und nach unten beschränkt. Nach Definition IV.3.1 sind deshalb

$$\bar{a} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}, \quad \underline{a} := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.56})$$

und es genügt zu zeigen, dass $\bar{a} = \underline{a}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gewählt. Weil $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| \leq \varepsilon, \quad (\text{IV.57})$$

was

$$\forall n \geq n_0 : a_{n_0} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon \quad (\text{IV.58})$$

impliziert. Daher gilt auch,

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \inf_{n \geq n_0} \{a_n\} =: b_{n_0} \leq c_{n_0} := \sup_{n \geq n_0} \{a_n\} \leq a_{n_0} + \varepsilon. \quad (\text{IV.59})$$

Aus (IV.59) und der Tatsache, dass b_m monoton steigt und c_m monoton sinkt, erhalten wir

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq b_{n_0} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{b_m\} = \underline{a} \quad (\text{IV.60})$$

und

$$\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c_m\} \leq c_{n_0} \leq a_{n_0} + \varepsilon, \quad (\text{IV.61})$$

also

$$0 \leq \bar{a} - \underline{a} \leq (a_{n_0} + \varepsilon) - (a_{n_0} - \varepsilon) = 2\varepsilon. \quad (\text{IV.62})$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass

$$\underline{a} = \bar{a}, \quad (\text{IV.63})$$

was nach Korollar IV.5 die Konvergenz von $(a_n)_{n=1}^\infty$ zur Konsequenz hat. □

IV.4. Ergänzungen

IV.4.1. Vertauschung von Limiten mit Produkt und Quotient

Beweis. (Beweis von Satz IV.2) Als konvergente Folgen sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt. Es gibt also ein $R < \infty$, so dass

$$\max \left\{ \sup_n |a_n|, \sup_n |b_n|, |a|, |b| \right\} \leq R. \quad (\text{IV.64})$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n'_0, n''_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n'_0 : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2R}, \quad (\text{IV.65})$$

$$\forall n \geq n''_0 : |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2R}. \quad (\text{IV.66})$$

Setzen wir $n_0 := \max\{n'_0, n''_0\}$, dann gilt, für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2R} \cdot R + R \cdot \frac{\varepsilon}{2R} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{IV.67})$$

Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n b_n\} = ab$.

Für den Beweis von (IV.24) zeigen wir zunächst, dass die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ beschränkt ist. Dazu setzen wir $\varepsilon' := \frac{|b|}{2}$. Aus der Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ folgt dann die Existenz von $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq \tilde{n}_0 : |b_n - b| \leq \varepsilon' = \frac{|b|}{2}. \quad (\text{IV.68})$$

Damit ist aber

$$\forall n \geq \tilde{n}_0 : |b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \geq \frac{|b|}{2}. \quad (\text{IV.69})$$

Also ist

$$\max \left\{ \frac{|1|}{|b|}, \sup_n \left| \frac{1}{b_n} \right| \right\} \leq R := \frac{2}{|b|} + \max \left\{ \frac{|1|}{|b_k|} \mid 1 \leq k \leq \tilde{n}_0 \right\} < \infty. \quad (\text{IV.70})$$

Für $\varepsilon > 0$ impliziert wiederum die Konvergenz von $(b_n)_{n=1}^\infty$ die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : |b - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{R^2}. \quad (\text{IV.71})$$

Somit ist dann

$$\forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} \leq R^2 \cdot \frac{\varepsilon}{R^2} = \varepsilon. \quad (\text{IV.72})$$

Also konvergiert $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^\infty$ in \mathbb{K} gegen $\frac{1}{b}$. Die Behauptung (IV.24) folgt nun aus (IV.23). \square

IV.4.2. Limes Superior/Inferior als größter/kleinster Häufungswert

Beweis. (Beweis von Satz IV.4) Aussagen (i) und (ii) sind offenbar wieder äquivalent, und wir zeigen nur (i). Dazu zeigen wir

$$(IV.42) \Rightarrow (IV.43) \Rightarrow (IV.44) \Rightarrow (IV.42). \quad (IV.73)$$

(IV.42) \Rightarrow (IV.43): Sei $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \bar{a} \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir an, es gäbe unendlich viele $a_n \geq \bar{a} + \varepsilon$, also eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} + \varepsilon$. Wegen $n_j \rightarrow \infty$, für $j \rightarrow \infty$, gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_j \geq m$ und deshalb ist

$$\forall m \in \mathbb{N} : \sup_{n \geq m} \{a_n\} \geq a_{n_j} \geq \bar{a} + \varepsilon, \quad (IV.74)$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \geq \bar{a} + \varepsilon = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} + \varepsilon. \quad (IV.75)$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : a_n \leq \bar{a} + \varepsilon. \quad (IV.76)$$

Gäbe es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \bar{a} - \varepsilon$, so müsste es $n'_0 \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$\forall n_0 \geq n'_0 : a_n \leq \bar{a} - \varepsilon. \quad (IV.77)$$

Dann wäre aber

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \leq \sup_{n \geq n'_0} \{a_n\} \leq \bar{a} - \varepsilon = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} - \varepsilon. \quad (IV.78)$$

Widerspruch. Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$.

(IV.43) \Rightarrow (IV.44): Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ so, dass

$$\left(\forall m \geq n_0 : a_m \leq \bar{a} + \varepsilon \right) \wedge \left(\forall j \in \mathbb{N} : a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon \right). \quad (IV.79)$$

Dann gilt

$$\forall j \in \mathbb{N}, n_j \geq n_0 : |a_{n_j} - \bar{a}| \leq \varepsilon, \quad (IV.80)$$

und \bar{a} ist ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Außerdem ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nach (IV.79) offensichtlich nach oben beschränkt.

Ist nun $b > \bar{a}$, so wählen wir $\varepsilon := \frac{b-\bar{a}}{3} > 0$. Nach (IV.43) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall m \geq n_0 : a_m \leq \bar{a} + \varepsilon = b - 2\varepsilon. \quad (IV.81)$$

Also kann b kein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sein. Somit ist \bar{a} der größte Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(IV.44) \Rightarrow (IV.42): Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine nach oben beschränkte Folge und \bar{a} ihr größter Häufungswert. Weil $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nach oben beschränkt ist, ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} < \infty$. Ist

andererseits $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ mit $a_{n_j} \geq \bar{a} - \varepsilon$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} \{a_m\} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}: n_j \geq n} \{a_{n_j}\} \right) \geq \bar{a} - \varepsilon, \quad (\text{IV.82})$$

und mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt

$$\bar{a} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} < \infty. \quad (\text{IV.83})$$

Sei nun $c_n := \sup_{m \geq n} \{a_m\}$. Dann ist c_n monoton fallend und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c_n\}$. Weiterhin gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $m(n) \geq n$, so dass

$$c_n - \frac{1}{n} \leq a_{m(n)} \leq c_n, \quad (\text{IV.84})$$

nach Definition des Supremums. O.B.d.A. können wir $m(n) < m(n+1)$ annehmen und erhalten eine konvergente Teilfolge $(a_{m(n)})_{n=1}^\infty$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{m(n)}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c_n\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}. \quad (\text{IV.85})$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n=1}^\infty$. Weil \bar{a} der größte Häufungswert ist, folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \bar{a}. \quad (\text{IV.86})$$

□