III. Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir haben schon einige Mengen in den Kapiteln I und II kennengelernt, etwa die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Jede dieser Zahlenmengen enthält unendlich viele Elemente,

$$|\mathbb{N}| \;=\; |\mathbb{Z}| \;=\; |\mathbb{Q}| \;=\; |\mathbb{R}| \;=\; \infty. \tag{III.1}$$

Um mengentheoretische Unterschiede zwischen ihnen auszumachen, müssen wir unsere bisherigen Begriffe über Mengen verfeinern.

III.1. Abzählbare Mengen

Definition III.0.1. Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, f : A \to B : \quad f \text{ ist bijektiv.} \tag{III.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Jede N-elementige Menge, $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ ist gleichmächtig zu $\{1, 2, \ldots, N\}$, denn

$$f : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}, \quad k \mapsto a_k, \tag{III.3}$$

  ist eine Bijektion.
- $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$, denn

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad k \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 1, \\ \frac{1}{2}\, k, & \text{falls } k \text{ gerade } \wedge\ k \geq 2, \\ -\frac{1}{2}\,(k-1), & \text{falls } k \text{ ungerade } \wedge\ k \geq 2, \end{cases} \tag{III.4}$$

  ist eine Bijektion,

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = -1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = -2, \quad \ldots \tag{III.5}$$

Definition III.0.2. Eine Menge A heißt **abzählbar** $:\Leftrightarrow$

$$(a) \quad A \text{ ist } \textbf{endlich}, \text{ d.h. } |A| \in \mathbb{N} \; (:\Leftrightarrow |A| < \infty) \text{ oder} \tag{III.6}$$

$$(b) \quad A \text{ ist } \textbf{unendlich}, \; |A| = \infty, \text{ und } A \text{ ist gleichmächtig zu } \mathbb{N} \tag{III.7}$$

Ist A nicht abzählbar, so heißt A **überabzählbar**.

Lemma III.1. *Seien A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$. Dann ist B abzählbar.*

Satz III.2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir zeichnen die Elemente $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in eine Tabelle und definieren eine Abbildung $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indem wir den Pfeilen folgen,

$$\begin{array}{ccccc} J(1) := (1,1) & \to & J(2) := (1,2) & & J(6) := (1,3) \quad \dots \\ & \swarrow & & \nearrow & \\ J(3) := (2,1) & & J(5) := (2,2) & & \\ \downarrow & \nearrow & & & \\ J(4) := (3,1) & & & & \end{array} \tag{III.8}$$

Die Bijektivität von J ist offensichtlich. □

Satz III.3. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir führen den Beweis für $\mathbb{Q}_+$. Jedes Element $q \in \mathbb{Q}_+$ lässt sich eineindeutig durch $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als

$$q = \frac{m}{n} \tag{III.9}$$

darstellen, wenn man voraussetzt, dass m und n teilerfremd sind (d.h. man kann m/n nicht kürzen). Also ist

$$J : \mathbb{Q}_+ \to A := \big\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\big|\; m, n \text{ teilerfremd}\big\}, \qquad \frac{m}{n} \longmapsto (m, n), \tag{III.10}$$

eine Bijektion. Nach Satz III.2 ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Lemma III.1 somit auch $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar. Also ist $\mathbb{Q}_+$ abzählbar. □

III.2. Dezimaldarstellung von Zahlen

Definition III.3.1. Eine **Folge (in A)** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to A, \quad n \longmapsto a_n, \tag{III.11}$$

wobei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge ist. Statt (III.11) schreibt man auch $a_1, a_2, a_3, \dots$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Die Menge aller Folgen in A bezeichnet man mit $A^{\mathbb{N}}$.

Wir wollen nun die Dezimaldarstellung von Zahlen zwischen 0 und 1 genauer untersuchen.

Definition III.3.2. Eine Folge $a : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ heißt **Dezimaldarstellung** der Zahl $0, a_1 a_2 a_3 \dots$

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N},\, k > n : \quad a_k < 9. \tag{III.12}$$

Die Menge der Dezimaldarstellungen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$.

Die Bedingung (III.12) schließt Zahlen mit Periode 9, wie z.B.

$$x \;=\; 0,1729999\ldots \tag{III.13}$$

aus, denn diese ist ja bereits durch

$$0,173000\ldots$$

dezimal dargestellt, und wir möchten, dass die Dezimaldarstellung eindeutig ist, siehe auch Abschnitt III.3.3.

Lemma III.4. *Die Menge der Dezimaldarstellungen $\mathcal{D}$ und die Menge $[0,1) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 1\}$ der reellen Zahlen zwischen Null und Eins sind gleichmächtig.*

Beweis. Den ausführlichen Beweis findet man in den Ergänzungen im Abschnitt III.3.3. Wir bemerken hier nur, dass eine Bijektion $\widetilde{J} : \mathcal{D} \to [0,1)$ durch $\widetilde{J}\big[(a_n)_{n=1}^\infty\big] := \sum_{n=1}^\infty a_n \cdot 10^{-n}$ gegeben ist. Allerdings wissen wir noch nicht, wie man unendlich viele Summanden addiert und müssen den Beweis in Abschnitt III.3.3 den Mitteln führen, die uns zur Verfügung stehen, nämlich dem Supremumsaxiom. □

Satz III.5. *$\mathcal{D}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nehmen wir an,

$$\mathcal{D} \;=\; \Big\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \Big\} \tag{III.14}$$

wäre eine Abzählung. Definiere nun eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{5,6,7,8,9\}, \\ 7, & \text{falls} \quad a_n^{(n)} \in \{0,1,2,3,4\}, \end{cases} \tag{III.15}$$

so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad b_n \;\neq\; a_n^{(n)}. \tag{III.16}$$

Offenbar wäre

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}, \tag{III.17}$$

da alle b_n verschieden von 9 sind. Andererseits impliziert aber (III.16), dass

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\neq\; \big(a_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{III.18}$$

also

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \Big\{ \big(a_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(a_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots \Big\} \;=\; \mathcal{D}, \tag{III.19}$$

was in Widerspruch zu (III.17) steht. □

Satz III.6. *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so wäre auch $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ als Teilmenge abzählbar. $[0,1)$ ist aber gleichmächtig zur überabzählbaren Menge $\mathcal{D}$ der Dezimaldarstellungen und somit selbst überabzählbar. Also kann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein. □

III.3. Ergänzungen

III.3.1. Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Beweis. Ist $|B|$ endlich, so gilt die Behauptung automatisch. Wir können also o.B.d.A. voraussetzen, dass B und somit auch $A \supseteq B$ unendlich sind,

$$|B| \ = \ |A| \ = \ \infty. \tag{III.20}$$

Da A abzählbar ist, gibt es eine Bijektion

$$x : \mathbb{N} \to A, \quad n \mapsto x_n, \tag{III.21}$$

und

$$A \ = \ \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{III.22}$$

Da $B \subseteq A$, gibt es eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_1 \notin B, \ x_2 \notin B, , \ldots, \ x_{n_1 - 1} \notin B, \ x_{n_1} \in B. \tag{III.23}$$

Weiterhin gibt es eine Zahl $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$, so dass

$$x_{n_1+1} \notin B, \ldots, \ x_{n_2-1} \notin B, \ x_{n_2} \in B. \tag{III.24}$$

Führen wir dieses Verfahren so fort, erhalten wir eine Abbildung

$$y : \mathbb{N} \to B, \quad j \mapsto y_j := x_{n_j}, \tag{III.25}$$

wobei $n_j \in \mathbb{N}, j \leq n_j < n_{j+1}$. Weil $x : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion ist, gilt $x_m \neq x_n$ falls $m < n$.
Insbesondere ist für $i < j$ auch $n_i < n_j$ und somit $x_{n_i} \neq x_{n_j}$,

$$i < j \ \Rightarrow \ n_i < n_j \ \Rightarrow \ y_2 = x_{n_i} \neq x_{n_j} = y_i. \tag{III.26}$$

Also ist y injektiv. Ist nun $b \in B \subseteq A$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b \ = \ x_n. \tag{III.27}$$

Mit der oben beschriebenen Prozedur erhält man dann $n = n_j$, für ein gewisses $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ (nach endlich vielen Schritten, das ist hier der Punkt!), also

$$b \ = \ x_{n_j} \ = \ y_j. \tag{III.28}$$

Somit ist y auch surjektiv und damit bijektiv $\square$

III.3.2. Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar

Satz III.7. *Jede Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Beweis. Seien die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben als

$$A_j \;=\; \{x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3}, \ldots\}. \tag{III.29}$$

Dann ist

$$A \;:=\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \;=\; \{x_{j,k} \mid \exists\,(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x_{j,k} \in A_j\}. \tag{III.30}$$

Wie im Beweis von Satz III.3 folgern wir nun, dass A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und somit abzählbar ist. ☐

III.3.3. Beweis der Gleichmächtigkeit der reellen Zahlen und der Dezimaldarstellungen (Lemma III.4)

Beweis. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}$ eine Dezimaldarstellung und, für $N \in \mathbb{N}$,

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^N a_n \cdot 10^{-n} \;\in\; \mathbb{Q} \;\subseteq\; \mathbb{R}. \tag{III.31}$$

Offensichtlich gilt immer $q_N < 1$, deshalb ist die Menge

$$A \;:=\; \{q_1, q_2, q_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R} \tag{III.32}$$

nach oben beschränkt und hat ein Supremum $\sup A \in [0,1]$. Wegen (III.12) gilt sogar $q_N \leq 1 - 10^{-\tilde{n}}$, für ein gewisses $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, und daher

$$\sup A \in [0,1). \tag{III.33}$$

Wir erhalten somit eine Abbildung

$$J : \mathcal{D} \to [0,1), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sup A. \tag{III.34}$$

Seien nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass dann auch $\sup A \neq \sup B$, wobei $B = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ und $p_N = \sum_{n=1}^N b_n \cdot 10^{-n}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_1 = b_1, \;\; a_2 = b_2, \;\ldots,\; a_{m-1} = b_{m-1}, \;\; a_m \leq b_m - 1 \tag{III.35}$$

(oder umgekehrt, dann vertausche man die Rollen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Weiterhin gibt es nach (III.12) ein $\tilde{n} \geq m+1$ mit

$$a_{\tilde{n}} \;\leq\; 8. \tag{III.36}$$

Bilden wir nun q_N, für $N \geq \tilde{n}$, so gilt

$$q_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + \sum_{n=m}^{\tilde{n}-1} a_n \cdot 10^{-n} + \underbrace{\sum_{n=\tilde{n}}^{N} a_n \cdot 10^{-n}}_{\leq 9\cdot 10^{-\tilde{n}}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} a_m \cdot 10^{-m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\tilde{n}} 9 \cdot 10^{-\tilde{n}}}_{=10^{-m}-10^{-\tilde{n}}}, \tag{III.37}$$

und andererseits, für $N \geq m$,

$$p_N := \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot 10^{-n} \geq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m}. \tag{III.38}$$

Mit

$$A := \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}, \quad B := \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \tag{III.39}$$

und

$$q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots, \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \tag{III.40}$$

erhalten wir dann

$$\forall k \in \mathbb{N}: \qquad \sup A = \sup\{q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots\} \tag{III.41}$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}: \qquad \sup B = \sup\{q_\ell, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots\}. \tag{III.42}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\sup A &= \sup\{q_{\tilde{n}}, q_{\tilde{n}+1}, q_{\tilde{n}+2}, \ldots\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + (a_m + 1) \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{m-1} b_n \cdot 10^{-n} + b_m \cdot 10^{-m} - 10^{-\tilde{n}} \\
&\leq \sup\{p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots\} - 10^{-\tilde{n}} \\
&= \sup B - 10^{-\tilde{n}} < \sup B.
\end{aligned} \tag{III.43}$$

Insbesondere ist

$$J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big] = \sup A < \sup B = J\big[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \tag{III.44}$$

und somit J *injektiv*.

Um die Surjektivität zu zeigen, wählen wir eine Zahl $x_0 \in [0,1)$ und bestimmen die natürliche Zahl $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \leq x_1 := x_0 - a_1 \cdot 10^{-1} < 10^{-1}. \tag{III.45}$$

Anschließend wählen wir $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\leq\; x_2 \;:=\; x_1 - a_2 \cdot 10^{-2} \;<\; 10^{-2} \tag{III.46}$$

und allgemein $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ so, dass

$$0 \;\leq\; x_k \;:=\; x_{k-1} - a_k \cdot 10^{-k} \;<\; 10^{-k}, \tag{III.47}$$

für vorher gewählte $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{0, \ldots, 9\}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$. Bilden wir wieder

$$q_N \;:=\; \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}, \qquad A \;:=\; \{q_1, q_2, \ldots\}, \tag{III.48}$$

so ist mit (III.45)-(III.47), für alle $N, k \in \mathbb{N}$

$$q_N \;\leq\; x_0 \;<\; q_N + 10^{-N} \;\leq\; q_{N+k} + 10^{-N}. \tag{III.49}$$

Also gilt, für alle $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup A \;\leq\; x_0 \;<\; \sup\{q_N, q_{N+1}, \ldots\} + 10^{-N} \;=\; \sup A + 10^{-N}. \tag{III.50}$$

Aus

$$\forall\, N \in \mathbb{N}: \quad \sup A \;\leq\; x_0 \;<\; \sup A + 10^{-N} \tag{III.51}$$

folgt aber

$$x_0 \;=\; \sup A \;=\; J\big[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big], \tag{III.52}$$

und J ist auch *surjektiv* und somit bijektiv. $\square$