Technische Universität Braunschweig

1. Übungsblatt

Ausgabe: 09.04.26

Abgabe: 16.04.26, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Analysis für Elektrotechnik SoSe 26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 1.1 (1+2+2 Punkte)

Es sei M eine Menge. Weiter sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\{B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Teilmengen von M. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $A \subseteq M$ und $i \in \mathcal{I}$ gilt $A \setminus B_i \;=\; A \cap B_i^c$.

(b) Für alle $A \subseteq M$ gilt $A \cap \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \;=\; \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A \cap B_i$.

(c) Es gilt $\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i\right)^c \;=\; \bigcap_{i\in\mathcal{I}} B_i^c$.

Hinweis: Alle Komplemente sind bezüglich der Obermenge M zu verstehen.

Aufgabe 1.2 (1,5+1,5+2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion. Geben Sie für die bijektiven Funktionen jeweils die Umkehrabbildung an.

(a) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty),\; x \mapsto (x-2)^2$.

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{1}{x}$.

(c) $h : [0,\infty) \to [0,\infty),\; x \mapsto \sqrt{\frac{x^2}{1+2x}}$.

Aufgabe 1.3 (2+3 Punkte)

(a) Es sei M eine endliche Menge mit $|M| > 1$. Auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ sei durch

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(M): \quad A \sqsubset B \quad :\Leftrightarrow \quad |A| < |B|$$

eine Ordnungsrelationen $\sqsubset$ definiert. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathfrak{P}(M)$ bezüglich $\sqsubset$ total geordnet ist.

(b) Es sei S eine total geordnete Menge bezüglich der Ordnungsrelation $<$. Auf der Menge $S \times S$ wird durch

$$\forall s = (s_1, s_2), r = (r_1, r_2) \in S \times S: \quad s \prec r \quad :\Leftrightarrow \quad (r_1 > s_1) \ \vee \ (r_1 = s_1 \ \wedge \ r_2 > s_2)$$

die Ordnungsrelation $\prec$ definiert. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $S \times S$ bezüglich $\prec$ total geordnet ist.

Aufgabe 1.4 (3+2 Punkte)

(a) Fertigen Sie für den Ring $\mathbb{Z}_5$ eine Additions- und eine Multiplikationstafel an.

(b) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}_5$ ein Körper ist.