Vektoranalysis
Wintersemester 25/26
Prof. Dr. Volker Bach
Dr. Gerardo Franco
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

12. Übungsblatt

Upload: 27.01.2026
Deadline: 03.02.2026, 11.30 Uhr (vor der Übung).

Aufgabe 12.1 (6)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_K (1-x_3^2)\, dx_1 \wedge dx_2 - 2x_2x_3\, dx_1 \wedge dx_3,$$

wobei

$$K := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 \geq -\tfrac{1}{2}\}.$$

Aufhabe 12.2 [Satz von Gauß (Divergenztheorem)](2 + 2 + 2)

Sei $(M, \mathfrak{I}, \mathcal{A}, g)$ eine kompakte, berandete und orientierbare n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Sei $\tilde{\mathcal{A}} = \{\phi_\alpha = (U_\alpha, x_\alpha)\}$ einen mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlas, der so gewählt ist, dass für alle $q \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt

$$\det J_{x_\alpha \circ x_\beta^{-1}}(x_\beta(q)) > 0.$$

Schreiben Sie die Riemannsche Metrik g in lokalen Koordinaten ϕ_α in der Form

$$g(q) = \sum_{i,j=1}^{n} g_\alpha^{ij}(q)\, dx_{\alpha,i}(q) \otimes dx_{\alpha,j}(q), \qquad q \in U_\alpha,$$

und setzen Sie

$$G_\alpha(q) := \left(g_\alpha^{ij}(q)\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Definieren Sie auf U_α die n-Form

$$\mathrm{vol}_\alpha(q) := \sqrt{\det G_\alpha(q)}\, dx_{\alpha,1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha,n}(q), \qquad q \in U_\alpha.$$

Zeigen Sie, dass für alle $q \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt

$$\mathrm{vol}_\alpha(q) = \mathrm{vol}_\beta(q). \tag{1}$$

Sei $\{\varphi_\alpha\}$ eine der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Partition der Eins. Definieren Sie

$$\mathrm{vol}_M(q) := \sum_\alpha \varphi_\alpha(q)\, \mathrm{vol}_\alpha(q).$$

Nach Definition und aufgrund von (1) gilt für $q \in U_\alpha$:

$$\mathrm{vol}_M(q) = \mathrm{vol}_\alpha(q).$$

(b) Sei $X \in T_1^0[M]$ ein Vektorfeld und $\phi = (U, x)$ eine Karte, sodass

$$X = \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Die Divergenz von X auf U, $\operatorname{div}(X) \in C^\infty(U,\mathbb{R})$, sei definiert durch

$$\operatorname{div}(X)(q) := \frac{1}{\sqrt{\det G_U(q)}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\big(\sqrt{\det G_U}\, X^k\big)(q), \qquad q \in U.$$

Diese Definition lässt sich mittels einer Partition der Eins auf ganz M fortsetzen und liefert eine wohldefinierte, von der Wahl der Karte unabhängige Funktion. Beweisen Sie, dass für alle $X \in T_1^0[M]$ gilt

$$d\big(i_X(\mathrm{vol}_M)\big) = \operatorname{div}(X)\,\mathrm{vol}_M,$$

wobei $i_X : \bigwedge^{(p)}[M] \to \bigwedge^{(p-1)}[M]$ die Kontraktionsabbildung aus Übung 11.3 bezeichnet.

(c) Beweisen Sie den Divergenzsatz: Für alle $X \in T_1^0[M]$ gilt

$$\int_{\partial M} i_X(\mathrm{vol}_M) = \int_M \operatorname{div}(X)\,\mathrm{vol}_M.$$

Aufgabe 12.3 [Pullback von Differentialformen] (1 + 1 + 1 + 1 + 1)

Sei Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Für eine p-Form $\alpha \in \bigwedge^{(p)}[N]$ mit

$$\alpha(\tilde q) = (\tilde q, \alpha_{\tilde q}), \quad \alpha_{\tilde q} \in \bigwedge^p T^*_{\tilde q}[N],$$

wird das Pullback von α, $f^*\alpha \in \bigwedge^{(p)}[M]$, definiert durch

$$(f^*\alpha)(q) = \left(q, \big(\bigwedge^p D_q[f]^T\big)\alpha_{f(q)}\right), \quad q \in M,$$

wobei die Abbildung $D_q[f]^T : T^*_{f(q)}[N] \to T^*_q[M]$ durch

$$D_q[f]^T[g]^*_{f(q)} = [g \circ f]^*_q$$

definiert ist und

$$\bigwedge^p D_q[f]^T(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = D_q[f]^T v_1 \wedge \cdots \wedge D_q[f]^T v_p.$$

(a) Sei $\phi = (U,x)$ ein Kartenpaar von N und schreibe $x \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ als $(f_1,\dots,f_n)$ mit $f_i : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$f^* dx_i = d(f_i)$$

gilt. Folgern Sie, dass f^*dx_i eine geschlossene Einform auf M ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \bigwedge^{(p)}[N]$ und $\beta \in \bigwedge^{(\tilde p)}[N]$ gilt:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

Folgern Sie daraus, dass $f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)$ ebenfalls geschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $g \in C^\infty(N;\mathbb{R})$ gilt:

$$f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^* g).$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $g \in C^\infty(N;\mathbb{R})$ und $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ gilt:

$$d\big(f^*(g\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big) = f^*(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}).$$

(e) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \bigwedge^{(p)}[N]$ gilt:

$$f^* d\alpha = d\,f^*\alpha.$$

Hinweis: Verwenden Sie ein lokales Kartenpaar $\phi = (U, x)$ für N, entwickeln Sie α in lokalen Koordinaten und nutzen Sie die obigen Punkte sowie die Linearität von f^* und d.

Aufgabe 12.4 [Nichtexistenz von Retraktionen auf den Rand] (3 + 4)

Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine kompakte, berandete und orientierbare m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial M \neq \emptyset$. Sei $i : \partial M \to M, i(x) = x$ die Inklusionsabbildung. Angenommen, es existiert eine glatte Abbildung $f \in C^\infty(M, \partial M)$ mit

$$f \circ i = \mathrm{id}_{\partial M}.$$

(a) Sei $\omega \in \bigwedge^{(m-1)}[\partial M]$ eine Volumenform. Verwenden Sie den Satz von Stokes und 12.3 (e), um zu zeigen, dass

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

(b) Folgern Sie daraus, dass eine solche Abbildung f nicht existieren kann.