Vektoranalysis
Wintersemester 25/26
Prof. Dr. Volker Bach
Dr. Gerardo Franco
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

10. Übungsblatt

Upload: 06.01.2026
Deadline: 13.01.2026, 11.30 Uhr (vor der Übung).

Aufgabe 10.1 (6)

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $\mathbb{X} \in T_1^0(M)$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] = 0 \quad \text{für alle } \mathbb{Y} \in T_1^0(M).$$

Zeige, dass $\mathbb{X} = 0$ gilt.

Aufgabe 10.2 [Jacobi-Identität] (6)

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in T_1^0(M)$. Zeige, dass

$$[\mathbb{X}, [\mathbb{Y}, \mathbb{Z}]] + [\mathbb{Y}, [\mathbb{Z}, \mathbb{X}]] + [\mathbb{Z}, [\mathbb{X}, \mathbb{Y}]] = 0$$

gilt.

Aufhabe 10.3 [Lie-Algebra einer Lie-Gruppe] (3 + 3)

Eine Lie-Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$ ist ein reeller Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

genannt die Lie-Klammer, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Bilinearität: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ gilt
$$[aX + Y, Z] = a[X, Z] + [Y, Z], \qquad [X, aY + Z] = a[X, Y] + [X, Z].$$
2. Antisymmetrie:
$$[X, Y] = -[Y, X].$$
3. Jacobi-Identität:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Sei G eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer glatten Verknüpfung

$$\cdot : G \times G \to G,$$

sodass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.
Für jedes $g \in G$ sei die Linkstranslation

$$L_g : G \to G, \qquad L_g(h) = g \cdot h.$$

Definiere

$$\mathfrak{g}_G = \{\mathbb{X} \in T_1^0(G) \mid (L_g)_* \mathbb{X} = \mathbb{X} \text{ für alle } g \in G\}.$$

(a) Zeige, dass $(\mathfrak{g}_G, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung
$$r : \mathfrak{g}_G \to T_e G, \qquad r(\mathbb{X}) = \mathbb{X}(e),$$
wobei $e \in G$ das neutrale Element bezeichnet, ein linearer Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.4 [Die orthogonale Gruppe] (3 + 3) Sei

$$O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M^T M = I_n\}, \qquad \mathrm{Sym}(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M^T = M\}.$$

Betrachte die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(n), \qquad F(A) = AA^T - I_n.$$

(a) Zeige, dass

$$J_F(A)H = AH^T + HA^T,$$

und folgere, dass $O(n)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

(b) Zeige, dass

$$T_A[O(n)] \cong \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid HA^T + AH^T = 0\}$$

gilt und dass

$$T[O(n)] \cong \{(A, H) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \mid HA^T + AH^T = 0\}.$$

(c) Verwende Übung 10.3(b) sowie den vorherigen Teil, um zu folgern, dass

$$\mathfrak{o}(n) := \mathfrak{g}_{O(n)} \cong \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid H^T + H = 0\}.$$