Vektoranalysis
Wintersemester 25/26
Prof. Dr. Volker Bach
Dr. Gerardo Franco
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

# 3. Übungsblatt

Upload: 04.11.2025
Deadline: 11.11.2025, 11.30 Uhr (vor der Übung).

## Aufgabe 3.1 (2 + 3 + 3)

Für $m \geq 1$ betrachten wir die Menge

$$\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m := \{[x] : x \in \mathbb{R}^m\},$$

wobei

$$[x] := \{x + n : n \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Wir betrachten eine Norm $\rho : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ und definieren

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty), \quad d(x, y) := \rho(x - y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ eine translationsinvariante Metrik auf $\mathbb{R}^m$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$d' : \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \to [0, \infty), \quad d'([x], [y]) = \rho'([x - y]),$$

mit

$$\rho' : \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \to [0, \infty), \quad \rho'([x]) := \inf_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x + n),$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ definiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$[\cdot] : (\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_d) \to (\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m, \mathfrak{T}_{d'})$$

stetig ist.

Lösung.

(a) Es gilt $d(x, y) = \rho(x - y) = 0$ genau dann, wenn $x - y = 0$. Zudem gilt

$$d(x, y) = \rho(x - y) = \rho(y - x) = d(y, x).$$

Dreiecksungleichung: Für $x, y, z$ gilt

$$d(x, z) = \rho(x - z) = \rho(x - y + y - z) \leq \rho(x - y) + \rho(y - z) = d(x, y) + d(y, z). \tag{1}$$

Translationsinvarianz:

$$d(x + z, y + z) = \rho(x + z - y - z) = \rho(x - y) = d(x, y).$$

(b) Offenbar gilt $d'([x],[y]) = d'([y],[x])$ und $d'([x],[x]) = 0$. Nun zeigen wir die Nichtentartung. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma. Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x+n) = \min_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x+n).$$

Beweis des Lemmas. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert für $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$\sum |x_i| = (|x_1|, \dots, |x_m|) \cdot (1, \dots, 1) \leq \sqrt{m}\, \|x\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Sei $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Da $\rho$ eine Norm ist, gilt:

$$\rho(x) \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| \rho(e_i) \leq \sqrt{m} \max\{\rho(e_i) : i = 1, \dots, m\} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^m} =: C\|x\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Dann folgt

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x-y) \leq C\|x-y\|_{\mathbb{R}^m},$$

also ist $\rho : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ stetig. Daher existiert für alle $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ ein $L > 0$ mit

$$|\rho(x)| \geq L.$$

Damit für alle $x \neq 0$:

$$\rho(x) = \|x\|\, \rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq L\|x\| \to \infty \quad \text{für } \|x\| \to \infty.$$

Also existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ ein endliches Gebiet in $\mathbb{Z}^m$, in dem das Infimum angenommen wird. Somit ist es ein Minimum.

—

Mit dem Lemma folgt: Falls $d'([x],[y]) = 0$, dann

$$0 = \inf_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x-y+n) = \min_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x-y+n),$$

und somit existiert ein $n \in \mathbb{Z}^m$ mit $\rho(x-y+n) = 0$. Da $\rho$ eine Norm ist, folgt $x = y + n$, also $[x] = [y]$.

Dreiecksungleichung: Für $[x], [y], [z]$ existieren nach dem Lemma $N, M \in \mathbb{Z}^m$ mit

$$\rho'([x-z]) = \rho(x-z+N), \qquad \rho'([z-y]) = \rho(z-y+M).$$

Also:

$$\begin{aligned} d'([x],[z]) + d'([z],[y]) &= \rho(x-z+N) + \rho(z-y+M) \\ &\geq \rho(x-y+M+N) \geq \rho'([x-y]) = d'([x],[y]). \end{aligned}$$

(c) Sei $[x] \in \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $d(x,y) < \varepsilon$. Dann gilt:

$$d'([x],[y]) = \inf_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x-y+n) \leq \rho(x-y) = d(x,y) < \varepsilon.$$

Somit ist die Abbildung stetig.

## Aufgabe 3.2 (3 + 2 + 3)

Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T}$ eine offene Überdeckung von $M$.

(a) Angenommen, für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt

$$\left|\{V \in \mathcal{U} : \ V \cap U \neq \emptyset\}\right| < \infty.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{U}$ lokal endlich ist.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Umkehrung von (a) an.

(c) Angenommen, für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $\overline{U}$ kompakt, und $\mathcal{U}$ ist lokal endlich. Beweisen Sie, dass für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\left|\{V \in \mathcal{U} : \ V \cap U \neq \emptyset\}\right| \ < \ \infty\,.$$

Lösung.

(a) Sei $x \in M$. Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ist, existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Per Definition schneidet $U$ nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$.

(b) Betrachte $(0, \infty)$ mit der Standardtopologie. Definiere

$$\mathcal{U} := \{(n, \infty) : n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}.$$

Für jedes $x \in (0, \infty)$ ist $U = (0, x+1)$ eine offene Menge mit $x \in (0, x+1)$, und

$$\{V \in \mathcal{U} : V \cap (0, x+1) \neq \emptyset\}$$

ist endlich. Daher ist $\mathcal{U}$ lokal endlich. Jedoch erfüllt sie die andere Bedingung nicht.

(c) Sei $U \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, existiert für jedes $x \in \overline{U}$ eine offene Umgebung $O_x$ von $x$ derart, dass

$$\left|\{V \in \mathcal{U} : V \cap O_x \neq \emptyset\}\right| < \infty.$$

Die Menge $\{O_x : x \in \overline{U}\}$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{U}$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, besitzt sie eine endliche Teilüberdeckung $\{O_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$. Da $U \subset \overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$, gilt:

$$\{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{V \in \mathcal{U} : V \cap O_{x_i} \neq \emptyset\}.$$

Letztere Vereinigung ist eine Vereinigung endlicher Mengen und somit endlich.

## Aufgabe 3.3 (8)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ der Raum der reellen $n \times m$-Matrizen. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq \min(n, m)$. Zeigen Sie, dass

$$\left\{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{rk}(A) = r\right\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie ihre Dimension.

Lösung.
Zunächst geben wir eine lokale Karte für das Element

$$1_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Betrachte die offene Menge $O \subset \mathbb{R}^{r\times r}$:

$$O := \det{}^{-1}_{r\times r}((1/2, 3/2)).$$

Wir definieren die stetige Abbildung

$$\phi : O \times \mathbb{R}^{(n-r)\times r} \times \mathbb{R}^{r\times(m-r)} \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad \phi(L, M, N) = \begin{pmatrix} L & N \\ M & ML^{-1}N \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $\phi(1, 0, 0) = 1_r$. Weiterhin sei

$$U := \phi\big(O \times \mathbb{R}^{(n-r)\times r} \times \mathbb{R}^{r\times(m-r)}\big) \subset \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Wir zeigen, dass $U$ eine offene Menge in $\mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$ ist. Betrachte die Menge

$$U' := \left\{ \begin{pmatrix} L & N \\ M & R \end{pmatrix} : L \in O \subset \mathbb{R}^{r\times r}, M \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}, N \in \mathbb{R}^{r\times(m-r)}, R \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(m-r)} \right\} \subset \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}),$$

welche offen in $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ ist. Wir zeigen nun:

$$U = U' \cap \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}), \tag{2}$$

was impliziert, dass $U$ offen bezüglich der relativen Topologie von $\mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$ ist. Die Inklusion $\subset$ ist klar. Für $\supset$: Sei $Q \in U' \cap \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$Q = \begin{pmatrix} L & N \\ M & R \end{pmatrix}$$

für geeignete Matrizen $L, N, M, R$. Da $L \in O$, ist $\det(L) \neq 0$, also ist $L$ invertierbar. Daher sind die $r$ Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Da $Q$ Rang $r$ hat, müssen die Spalten von

$$\begin{pmatrix} N \\ R \end{pmatrix}$$

im von den Spalten von $\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$ erzeugten Raum liegen. Mit anderen Worten, es existiert eine Matrix $C \in \mathcal{M}_{r\times(m-r)}(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{pmatrix} N \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LC \\ MC \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $C = L^{-1}N$ und $R = ML^{-1}N$, somit

$$Q = \begin{pmatrix} L & N \\ M & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & N \\ M & ML^{-1}N \end{pmatrix} = \phi(L, M, N) \in U.$$

Wir betrachten die Karte

$$x : U \subset \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}) \to O \times \mathbb{R}^{(n-r)\times r} \times \mathbb{R}^{r\times(m-r)}, \quad x\begin{pmatrix} L & N \\ M & R \end{pmatrix} = (L, M, N).$$

Da $x \circ \phi = I$ und $\phi \circ x = I$, ist $x$ ein Homöomorphismus. Somit ist $(x, U)$ eine Karte für $1_r$.

Nun geben wir eine Karte für ein allgemeines $A \in \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$ an.

Lemma 1. Für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ mit Rang $r$ existieren invertierbare Matrizen $X_A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $Y_A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$X_A A Y_A = 1_r.$$

Für $A \in \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$ seien $X_A, Y_A$ wie im Lemma 1. Dann ist die Abbildung

$$\phi_A : \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad \phi_A(Q) = X_A Q Y_A$$

ein Homöomorphismus mit $\phi_A(A) = 1_r$. Sei $U_A := \phi_A^{-1}(U)$ und die Karte

$$x_A := x \circ \phi_A : U_A \to O \times \mathbb{R}^{(n-r)\times r} \times \mathbb{R}^{r\times(m-r)}.$$

Dann ist $(x_A, U_A)$ eine Karte für $A$.

Betrachte den Kartenwechsel. Seien $A, B \in \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$ und $X_A, X_B, Y_A, Y_B$ wie im Lemma 1. Wir setzen

$$X_B X_A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, \quad Y_A^{-1} Y_B = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix},$$

mit den passenden Blockgrößen. Für $(L, M, N) \in x_A(U_A \cap U_B) \subset O \times \mathbb{R}^{(n-r)\times r} \times \mathbb{R}^{r\times(m-r)}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_B \circ x_A^{-1}(L, M, N) &= x \circ \phi_B \circ \phi_A^{-1} \begin{pmatrix} L & N \\ M & ML^{-1}N \end{pmatrix} \\ &= x\left( X_B X_A^{-1} \begin{pmatrix} L & N \\ M & ML^{-1}N \end{pmatrix} Y_A^{-1} Y_B \right) \\ &= (f_1(L, M, N), f_2(L, M, N), f_3(L, M, N)), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die $f_i$ glatte Funktionen sind. Daher bildet

$$\{(x_A, U_A) : A \in \mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})\}$$

ein glattes Atlas für $\mathcal{M}^r_{n\times m}(\mathbb{R})$.