Vektoranalysis
Wintersemester 25/26
Prof. Dr. Volker Bach
Dr. Gerardo Franco
M.Sc. Jakob Geisler

Technische Universität Braunschweig

3. Übungsblatt

Upload: 04.11.2025
Deadline: 11.11.2025, 11.30 Uhr (vor der Übung).

Aufgabe 3.1 (2 + 3 + 3)

Für $m \geq 1$ betrachten wir die Menge

$$\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m := \{[x] : x \in \mathbb{R}^m\},$$

wobei

$$[x] := \{x + n : n \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Wir betrachten eine Norm $\rho : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ und definieren

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty), \quad d(x, y) := \rho(x - y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ eine translationsinvariante Metrik auf $\mathbb{R}^m$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$d' : \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \to [0, \infty), \quad d'([x], [y]) = \rho'([x - y]),$$

mit

$$\rho' : \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \to [0, \infty), \quad \rho'([x]) := \inf_{n \in \mathbb{Z}^m} \rho(x + n),$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ definiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$[\cdot] : (\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_d) \to (\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m, \mathfrak{T}_{d'})$$

stetig ist.

Aufgabe 3.2 (3 + 2 + 3)

Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T}$ eine offene Überdeckung von M.

(a) Angenommen, für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt

$$\left|\{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}\right| < \infty.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{U}$ lokal endlich ist.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Umkehrung von (a) an.

(c) Angenommen, für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $\overline{U}$ kompakt, und $\mathcal{U}$ ist lokal endlich. Beweisen Sie, dass für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\left|\{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}\right| < \infty.$$

Aufgabe 3.3 (8)

Sei $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ der Raum der reellen 3×3-Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : \mathrm{rk}(A) = 2\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie ihre Dimension.