



2. Übungsblatt

Upload: 27.10.2025.

Deadline: 04.11.2025, 11:30 Uhr (vor der Übung).

Aufgabe 2.1 (3 + 3)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sei $M \neq \emptyset$ und seien $\{\mathfrak{T}_i\}_{i \in I}$ Topologien auf M , dann ist auch $\mathfrak{T} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{T}_i$ eine Topologie auf M .
- (b) Sei $A \subseteq M$ eine Teilmenge von M und $\mathfrak{T}$ eine Topologie auf M . Dann definiert

$$\mathfrak{T}_{\text{rel}} := \{A \cap U \mid U \in \mathfrak{T}\}$$

eine Topologie auf A .

Aufgabe 2.2 (2 + 2 + 2)

- (a) Zeigen Sie, dass $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ als Teilraum $([0, 1], \mathfrak{T}_{\text{rel}})$ von $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\text{eukl}})$ zusammenhängend ist.
- (b) Beweisen Sie Lemma I.13.
- (c) Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Dann definieren wir auf M zwei Relationen:

$x \sim_1 y \Leftrightarrow$ Es gibt einen zusammenhängenden Teilraum $N \subseteq M$ mit $x, y \in N$,

$x \sim_2 y \Leftrightarrow$ Es gibt einen wegzusammenhängenden Teilraum $N \subseteq M$ mit $x, y \in N$.

Zeigen Sie: $\sim_1$ und $\sim_2$ definieren Äquivalenzrelationen. Die Äquivalenzklassen $[x]_1$ bezüglich $\sim_1$ nennen wir **Zusammenhangskomponenten**, die Äquivalenzklassen $[x]_2$ bezüglich $\sim_2$ **Wegzusammenhangskomponenten**.

Aufgabe 2.3 (3 + 3)

- (a) Zeigen Sie, dass durch $x_1^{-1} : (0, 2\pi) \rightarrow (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und $x_2^{-1} : (-\pi, \pi) \rightarrow (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ ein Atlas auf

$$K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}$$

induziert wird und geben Sie die Familie von Karten $\{\phi_1 = (U_1, x_1), \phi_2 = (U_2, x_2)\}$ explizit an.

- (b) Geben Sie einen hausdorffschen, separablen und parakompakten topologischen Raum M und zwei nicht verträgliche Karten darauf an.

Aufgabe 2.4 (2 + 2 + 2)

Gegeben sei die Menge

$$O(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T A = A A^T = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}\}$$

der orthogonalen 2×2 -Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\}_{\varphi \in [0, 2\pi)}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $O(2) \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ als Teilraum des topologischen Raums $(\mathbb{R}^4, \mathfrak{T}_{\text{eukl}})$ nicht (weg-) zusammenhängend ist und klassifizieren Sie die einzelnen (Weg-) Zusammenhangskomponenten.

(c) Geben Sie einen Atlas für $O(2)$ an.