IV. Tangential- und Kotangentialraum

IV.1. Tangentialraum

Definition IV.1. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und

$$\widetilde{T}_q[\mathcal{M}] \ := \ \big\{ \gamma \in C^1[(a,b); \mathcal{M}] \ \big| \ a < 0 < b \,, \ \gamma(0) = q \big\} \tag{IV.1}$$

der Raum aller C^1-Kurven γ in M mit $\gamma(0) = q$. Zwei Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ heißen **tangential,** $[\gamma] = [\tilde{\gamma}]$:⇔

$$\exists \, (U, \underline{x}) \in \mathcal{A} \,, \ U \ni q : \qquad \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \gamma \Big)\Big|_{t=0} \ = \ \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \tilde{\gamma} \Big)\Big|_{t=0} . \tag{IV.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Glg. (IV.2) ist kartenunabhängig. Gilt (IV.2) und sind $(U, \underline{x}), (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$, so ist

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big\{ \big(\underline{y} \circ \gamma \big)\big|_{t=0} \ - \ \big(\underline{y} \circ \tilde{\gamma} \Big)\big|_{t=0} \Big\} \\ &\qquad = \frac{d}{dt}\Big\{ \big[(\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}) \circ (\underline{x} \circ \gamma) \big]\big|_{t=0} \ - \ \big[(\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}) \circ (\underline{x} \circ \tilde{\gamma}) \big]\big|_{t=0} \Big\} \\ &\qquad = J_{\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \Big\{ \frac{d}{dt}\big(\underline{x} \circ \gamma \big)\big|_{t=0} \ - \ \frac{d}{dt}\big(\underline{x} \circ \gamma \big)\big|_{t=0} \Big\} \ = \ 0 \,. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

  Daher ist Glg. (IV.2) gleichwertig mit

$$\forall \, (U, \underline{x}) \in \mathcal{A} \,, \ U \ni q : \qquad \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \gamma \Big)\Big|_{t=0} \ = \ \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \tilde{\gamma} \Big)\Big|_{t=0} . \tag{IV.4}$$

- Die Eigenschaft zweier C^1-Kurven, bei $q \in M$ tangential zu sein, definiert eine Äquivalenzrelation.

Definition IV.2. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $q \in M$.

(i) Die Familie

$$T_q[\mathcal{M}] \ := \ \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]/[\cdot] \ = \ \big\{[\gamma] \ \big| \ \gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]\big\} \tag{IV.5}$$

der Äquivalenzklassen heißt **Tangentialraum an q**.

(ii) Ist $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$, so definieren wir

$$\Theta_{\phi,q} : \ T_q[\mathcal{M}] \ \to \ \mathbb{R}^m , \quad [\gamma] \ \mapsto \ \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \gamma\Big)\Big|_{t=0} . \tag{IV.6}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildung $\Theta_{\phi,q} : T_q[\mathcal{M}] \to \mathbb{R}^m$ ist eine Bijektion, denn offensichtlich ist $\Theta_{\phi,q}$ nach Glg. (IV.4) injektiv. Wählen wir $\varepsilon > 0$ genügend klein und definieren zu $\nu \in \mathbb{R}^m$ eine Kurve $\gamma_\nu \in C^1[(-\varepsilon, \varepsilon); \mathcal{M}]$ durch

$$\gamma_\nu(t) \ := \ \underline{x}^{-1}\big[\underline{x}(q) + t\nu\big] , \tag{IV.7}$$

so ist $\gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ und

$$\Theta_{\phi,q}[\gamma_\nu] \ = \ \frac{d}{dt}\Big(\underline{x} \circ \gamma_\nu\Big)\Big|_{t=0} \ = \ \frac{d}{dt}\big[\underline{x}(q) + t\nu\big]\Big|_{t=0} \ = \ \nu , \tag{IV.8}$$

und $\Theta_{\phi,q}$ ist damit auch surjektiv.

Definition IV.3. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren

$$(+) : T_q[\mathcal{M}] \times T_q[\mathcal{M}] \to T_q[\mathcal{M}] \quad \text{und} \quad (\cdot) : \mathbb{R} \times T_q[\mathcal{M}] \to T_q[\mathcal{M}] \tag{IV.9}$$

durch

$$[\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}] \ := \ \Theta_{\phi,q}^{-1}\Big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] \ + \ \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\Big) . \tag{IV.10}$$

Lemma IV.4. Die Abbildungen (+) und (·) in Definition IV.3 sind wohldefiniert, und $T_q[\mathcal{M}]$ ist bezüglich dieser Verknüpfungen ein reeller Vektorraum der Dimension m.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass sich die Vektorraumeigenschaften für $T_q[\mathcal{M}]$ leicht aus den entsprechenden Eigenschaften in $\mathbb{R}^m$ ergeben. Beispielsweise erhält man die Kommutativität der Addition aus

$$[\gamma] + [\tilde{\gamma}] \ = \ \Theta_{\phi,q}^{-1}\big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] + \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\big) \ = \ \Theta_{\phi,q}^{-1}\big(\Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}] + \Theta_{\phi,q}[\gamma]\big) \ = \ [\tilde{\gamma}] + [\gamma] . \tag{IV.11}$$

Nicht so offensichtlich ist die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen, d.h. die Kartenunabhängigkeit von (IV.10). Seien dazu $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$. Dann ist wegen der Linearität der Ableitung von $\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}$

$$\begin{aligned} \Theta_{\psi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\psi,q}[\tilde{\gamma}] \ &= \frac{d}{dt}\big(\underline{y} \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} + \lambda \cdot \frac{d}{dt}\big(\underline{y} \circ \tilde{\gamma}\big)\Big|_{t=0} \\ &= J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \Big\{ \frac{d}{dt}\big(\underline{x} \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} + \lambda \cdot \frac{d}{dt}\big(\underline{x} \circ \tilde{\gamma}\big)\Big|_{t=0} \Big\} \\ &= J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \Big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\Big) . \end{aligned} \tag{IV.12}$$

Ist andererseits $\nu \in \mathbb{R}^m$ und $\gamma_\nu \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ wieder durch (IV.7) definiert, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt wird, dass $[\underline{y}(q) + (-\varepsilon, \varepsilon)]\nu \subset \underline{y}(V)$ gilt, so ist nach (IV.8)

$$\Theta_{\phi,q}^{-1}(\nu) \;=\; [\gamma_\nu] \;=\; \big[\underline{x}^{-1}\big(\underline{x}(q) + t\nu\big)\big] \tag{IV.13}$$

und somit

$$\big[\Theta_{\psi,q} \circ \Theta_{\phi,q}^{-1}\big](\nu) \;=\; \Theta_{\psi,q}[\gamma_\nu] \;=\; J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \nu\,, \tag{IV.14}$$

d.h. $\Theta_{\psi,q} \circ \Theta_{\phi,q}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ und

$$\Theta_{\psi,q} \circ \Theta_{\phi,q}^{-1} \;=\; J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \;=\; \left(\frac{\partial\big(\underline{y}^i[\underline{x}^{-1}(x)]\big)}{\partial x^j}\bigg|_{x=\underline{x}(q)} \right)_{i,j=1}^{m} . \tag{IV.15}$$

Insbesondere ist auch

$$\begin{aligned} \Theta_{\psi,q}^{-1}\Big(\Theta_{\psi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\psi,q}[\tilde{\gamma}]\Big) \;&=\; \Theta_{\psi,q}^{-1}\Big[J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\big)\Big] \\ &=\; \Theta_{\phi,q}^{-1}\Big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\Big)\,, \end{aligned} \tag{IV.16}$$

und die in (IV.9)-(IV.10) definierten Verküpfungen sind wohldefiniert. Nach Glg. (IV.10) gilt

$$\Theta_{\phi,q}\big([\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}]\big) \;=\; \Theta_{\phi,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\,, \tag{IV.17}$$

für alle $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\Theta_{\phi,q} : T_q[\mathcal{M}] \to \mathbb{R}^m$ ist ein bijektiver Vektorraumisomorphismus, also ein Isomorphismus. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_{\rm eukl}, {\rm id}_{\mathbb{R}^m})$ und $q \in \mathbb{R}^m$ ist $T_q[\mathbb{R}^m] = \mathbb{R}^m$.
- Seien $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und nichtleer und $g \in C^\infty(V; \mathbb{R}^3)$ injektiv, mit

$$\forall\,(r,s) \in V: \quad g(r,s) \;:=\; \begin{pmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \\ z(r,s) \end{pmatrix} . \tag{IV.18}$$

  Dann ist $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}_{\rm rel}, \{\phi\})$ mit $M = g(V)$ und $\phi = (M, g^{-1})$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ist nun $q = g(r_0, s_0) \in M$, so betrachten wir

$$\gamma_1(t) \;:=\; g(r_0 + t, s_0)\,, \quad \gamma_2(t) \;:=\; g(r_0, s_0 + t)\,, \tag{IV.19}$$

  für $|t| < \varepsilon \ll 1$. Offenbar sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ und

$$g^{-1} \circ \gamma_1(t) \;:=\; (r_0 + t, s_0)\,, \quad g^{-1} \circ \gamma_2(t) \;:=\; (r_0, s_0 + t)\,, \tag{IV.20}$$

  Also sind

$$\Theta_{\phi,q}[\gamma_1] \;=\; \frac{d}{dt}\big(g^{-1} \circ \gamma_1\big)\Big|_{t=0} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{IV.21}$$

$$\Theta_{\phi,q}[\gamma_2] \;=\; \frac{d}{dt}\big(g^{-1} \circ \gamma_2\big)\Big|_{t=0} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{IV.22}$$

Definition IV.5. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren durch

$$\mathfrak{T}_{T_q[\mathcal{M}]} \;:=\; \left\{ \Theta_{\phi,q}^{-1}(V) \;\middle|\; V \subseteq \mathbb{R}^m\,, \quad V \in \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}} \right\} \tag{IV.23}$$

eine Topologie auf $T_q[\mathcal{M}]$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Nach (IV.15) ist für $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$ die Abbildung $\Theta_{\psi,q} \circ \Theta_{\phi,q}^{-1} = J_{\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)]$ ein Iso- und deshalb auch ein Homöomorphismus. Daher ist (IV.23) kartenunabhängig.
- $(T_q[\mathcal{M}], \mathfrak{T}_{T_q[\mathcal{M}]})$ und $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}})$ sind homöomorph.

Definition IV.6. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten, $q \in M$ und $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$. Die **Ableitung $\boldsymbol{D_q[f]}$ von $\boldsymbol{f}$ bei $\boldsymbol{q}$** ist definiert als Abbildung

$$D_q[f] : T_q[\mathcal{M}] \;\to\; T_{f(q)}[\mathcal{N}]\,, \tag{IV.24}$$

$$D_q[f] \;:=\; \Theta_{\psi,f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ \Theta_{\phi,q}\,, \tag{IV.25}$$

wobei $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ und $\psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{B}$ mit $U \cap f^{-1}(V) \ni q$.

Lemma IV.7. Die Ableitung $D_q[f]$ von $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ bei $q \in M$ ist wohldefiniert, d.h. kartenunabhängig.

Beweis. Seien $\phi = (U, \underline{x}), \hat{\phi} = (\widehat{U}, \underline{\hat{x}}) \in \mathcal{A}$ und $\psi = (V, \underline{y}), \hat{\psi} = (\widehat{V}, \underline{\hat{y}}) \in \mathcal{B}$ Paare von Karten mit $U \cap \widehat{U} \cap f^{-1}(V \cap \widehat{V}) \ni q$. Dann gilt mit (IV.25) und (IV.15)

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_q[f] \;&:= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{\hat{y}} \circ f \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{\hat{y}} \circ \underline{y}^{-1}}[(\underline{y} \circ f)(q)] \circ J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ J_{\underline{x} \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ \Theta_{\hat{\psi},f(q)} \circ \Theta_{\psi,f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ J_{\underline{x} \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{\phi,q} \circ \Theta_{\hat{\phi},q}^{-1} \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{\psi,f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \;=\; D_q[f]\,.
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

∎

Lemma IV.8. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten, $q \in M$ und $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ und $\gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$. Dann ist

$$D_q[f]\big([\gamma]\big) \;=\; [f \circ \gamma]\,. \tag{IV.27}$$

Beweis. Sind $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ und $\psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{B}$ Karten mit $U \cap f^{-1}(V) \ni q$, so ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q}[\gamma] \;&= J_{\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \frac{d}{dt}\big(\underline{x} \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} \;=\; \frac{d}{dt}\big(\underline{y} \circ f \circ \underline{x}^{-1} \circ \underline{x} \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(\underline{y} \circ f \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} \;=\; \Theta_{\psi,f(q)}[f \circ \gamma]\,.
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

Also ist

$$D_q[f]\big([\gamma]\big) \;=\; \Theta^{-1}_{\psi,f(q)} \circ J_{\underline{y}\circ f\circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q}[\gamma] \;=\; [f\circ\gamma]\,. \tag{IV.29}$$

□

Definition IV.9. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq M$ offen und nichtleer.

(i) Wir definieren die Mengen

$$T[\mathcal{M}] \;:=\; \bigsqcup_{q\in M} T_q[\mathcal{M}] \;:=\; \bigcup_{q\in M} \Big(\{q\}\times T_q[\mathcal{M}]\Big)\,, \tag{IV.30}$$

$$T[U] \;:=\; \bigsqcup_{q\in U} T_q[\mathcal{M}] \;:=\; \bigcup_{q\in U} \Big(\{q\}\times T_q[\mathcal{M}]\Big) \;\subseteq\; T[\mathcal{M}]\,. \tag{IV.31}$$

(ii) Ist $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ eine Karte, so definieren wir für $\gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$

$$\Theta_\phi : T[U] \;\to\; \underline{x}(U)\times\mathbb{R}^m\,, \quad \big(q,[\gamma]\big) \;\mapsto\; \big(\underline{x}(q), \Theta_{\phi,q}[\gamma]\big)\,. \tag{IV.32}$$

(iii) Wir definieren auf $T[\mathcal{M}]$ eine Topologie durch

$$\mathfrak{T}_{T[\mathcal{M}]} \;:=\; \big\{\Theta_\phi^{-1}(V) \;\big|\; \phi = (U,\underline{x}) \in \mathcal{A}\,,\; V \subseteq \underline{x}(U)\times\mathbb{R}^m \text{ offen}\big\}\,. \tag{IV.33}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Das System $T[\mathcal{M}]$ wird in der Literatur auch häufig etwas unpräzise mit $\bigcup_{q\in M} T_q[\mathcal{M}]$ bezeichnet. Diese ist jedoch etwas irreführend, da alle Tangentialräume isomorph zu $\mathbb{R}^m$ sind und man sie alle identifizieren könnte. Eine Alternative bietet noch die Bezeichnung

$$\begin{aligned} T[\mathcal{M}] \;&=\; \bigsqcup_{q\in M} T_q[\mathcal{M}] \;:=\; \Big(T_q[\mathcal{M}]\Big)_{q\in M} \\ &= \Big\{v : M \to \bigcup_{q\in M} T_q[\mathcal{M}] \;\Big|\; \forall\, q\in M: \quad v_q \in T_q[\mathcal{M}]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{IV.34}$$

- Das System $\mathfrak{T}_{T[\mathcal{M}]} \subseteq \mathfrak{P}\big(T[\mathcal{M}]\big)$ ist die kleinste Topologie auf $T[\mathcal{M}]$, sodass $\Theta_\phi : T[U] \to \underline{x}(U)\times\mathbb{R}^m$ für alle $\phi = (U,\underline{x}) \in \mathcal{A}$ Homöomorphismen sind.

Nachdem wir den Tangentialraum $T[\mathcal{M}]$ topologisiert haben, wollen wir ihn auch als Manngifaltigkeit darstellen. Dazu definieren wir verträgliche Karten.

Lemma IV.10. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ zwei mit $\mathcal{A}$ (und miteinander) verträgliche Karten von $\mathcal{M}$. Dann sind $\big(T[U], \Theta_\phi\big)$ und $\big(T[V], \Theta_\psi\big)$ zwei miteinander verträgliche Karten von $T[\mathcal{M}]$.

Beweis. Nach der obigen Bemerkung zu (IV.34) sind $\Theta_\phi : T[U] \to \underline{x}(U) \times \mathbb{R}^m$ und $\Theta_\psi : T[V] \to \underline{x}(V) \times \mathbb{R}^m$ Homöomorphismen. Zum Nachprüfen der Verträglichkeit können wir o.B.d.A. $W := U \cap V \neq \emptyset$. Nach (IV.15) ist dann

$$\forall\, [\underline{x}(q), \nu] \in \underline{x}(U) \times \mathbb{R}^m : \quad \Theta_\phi^{-1}\big([\underline{x}(q), \nu]\big) \;=\; \big[q,\ \Theta_{\phi,q}^{-1}(\nu)\big]\,, \tag{IV.35}$$

woraus wir

$$\begin{aligned} \Big[\Theta_\psi \circ \Theta_\phi^{-1}\Big]\big([\underline{x}(q), \nu]\big) \;&=\Theta_\psi\big[q,\ \Theta_{\phi,q}^{-1}(\nu)\big] \;=\; \Big(\underline{y}(q)\,,\ \big(\Theta_{\psi,q} \circ \Theta_{\phi,q}^{-1}\big)[\nu]\Big) \\ &= \Big(\underline{y}(q)\,,\ J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \cdot \nu\Big) \end{aligned} \tag{IV.36}$$

erhalten. Für alle $(\xi, \nu) \in \underline{x}(W) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist also

$$\Big(\Theta_\psi \circ \Theta_\phi^{-1}\Big)[(\xi, \nu)] \;=\; \Big([\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}](\xi)\,,\ J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\xi] \cdot \nu\Big)\,. \tag{IV.37}$$

Mit $(\underline{y} \circ \underline{x}^{-1}) \in C^\infty[\underline{x}(W); \underline{y}(W)]$ ist somit auch

$$\Theta_\psi \circ \Theta_\phi^{-1} \;\in\; C^\infty\big[\underline{x}(W) \times \mathbb{R}^m\,;\ \underline{y}(W) \times \mathbb{R}^m\big]\,. \tag{IV.38}$$

□

Unter Berufung auf Lemma IV.10 stellt das System

$$T[\mathcal{A}] \;:=\; \Big\{\big(T[U], \Theta_\phi\big)\ \Big|\ \phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}\Big\} \tag{IV.39}$$

offenbar einen Atlas von $T[\mathcal{M}]$ dar, das wir nun als Mannigfaltigkeit definieren.

Definition IV.11. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$. Die Mannigfaltigkeit $T[\mathcal{M}] = \big(T[M], \mathfrak{T}_{T[\mathcal{M}]}, T[\mathcal{A}]\big)$ der Dimension $2m$ bezeichnen wir als **Tangentenbündel von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\{\phi = (M, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})\}$ ein Atlas von M. Mit $q \in M$, $v \in \mathbb{R}^m$ und $\gamma(t) := q + tv$ ist

$$\Theta_\phi(q, [\gamma]) \;=\; \big(q\,,\ \tfrac{d}{dt}\{q + tv\}|_{t=0}\big) \;=\; (q, v)\,. \tag{IV.40}$$

  Somit ist $T[M]$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^m$. Lokal hat das Tangentenbündel stets diese Produktform (innerhalb eines Kartenbereichs). Nicht alle Tangentenbündel sind jedoch auch global von dieser Form.

- Es ist z.B. $T[\mathbb{S}^1]$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, aber $T[\mathbb{S}^2]$ ist nicht diffeomorph zu $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.
- Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ der Dimension m, deren Tangentenbündel $T[\mathcal{M}]$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^m$ ist, nennt man *parallelisierbar*.
- Über Produktkarten sieht man, dass $T[\mathcal{M} \times \mathcal{N}] = T[\mathcal{M}] \times T[\mathcal{N}]$ gilt.

IV.2. Kotangentialraum

Parallel zur Konstruktion des Tangentialraums und des Tangentenbündels läuft die des Kotangentialraums und des Kotangentenbündels einer Mannigfaltigkeit.

Definition IV.12. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und

$$\widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}] \;:=\; \bigcup_{U \in \mathfrak{T}(q)} C^1(U; \mathbb{R})\,. \tag{IV.41}$$

Zwei reelle Funktionen $f, \tilde{f} \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$ heißen **kotangential bei** $\boldsymbol{q}$**,** $[\boldsymbol{f}]^* = [\tilde{\boldsymbol{f}}]^*$

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists\,(U, \underline{x}) \in \mathcal{A},\; U \ni q: \quad J_{f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \;=\; J_{\tilde{f} \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)]\,. \tag{IV.42}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wie Glg. (IV.2) ist auch Glg. (IV.42) kartenunabhängig und gleichwertig mit

$$\forall\,(U, \underline{x}) \in \mathcal{A},\; U \ni q: \quad J_{f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \;=\; J_{\tilde{f} \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)]\,. \tag{IV.43}$$

- Die Eigenschaft zweier Funktionen $f, \tilde{f} \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$, kotangential bei $q \in M$ zu sein, ist eine Äquivalenzrelation.

Definition IV.13. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $q \in M$.

(i) Die Menge

$$T_q^*[\mathcal{M}] \;:=\; \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]/[\cdot]^* \;=\; \big\{ [f]^* \;\big|\; f \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}] \big\} \tag{IV.44}$$

der Äquivalenzklassen heißt **Kotangentialraum bei** $\boldsymbol{q}$.

(ii) Ist $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$, so definieren wir

$$\Theta_{\phi,q}^* : \; T_q^*[\mathcal{M}] \;\to\; \mathbb{R}^m\,, \quad [f]^* \;\mapsto\; J_{f \circ \underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)]\,. \tag{IV.45}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildung $\Theta_{\phi,q}^*$ ist offensichtlich injektiv definiert. Sind nun $\mu \in \mathbb{Z}_1^m$ und $\underline{x}^\mu \in C^\infty(U : \mathbb{R})$ die μ. Koordinate von $\underline{x} = (\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^m)$, so ist $\underline{x}^\mu \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$, und mit $\underline{x}(q) = x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ ist

$$\begin{aligned} \Theta_{\phi,q}^*[\underline{x}^\mu]^* \;&=\; J_{\underline{x}^\mu \circ \underline{x}^{-1}}[x(q)] \;=\; \left(\frac{\partial(\underline{x}^\mu \circ \underline{x}^{-1})[x]}{\partial x^1}\bigg|_{x=x(q)}, \ldots, \frac{\partial(\underline{x}^\mu \circ \underline{x}^{-1})[x]}{\partial x^m}\bigg|_{x=x(q)} \right) \\ &=\; \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^1}\bigg|_{x=x(q)}, \ldots, \frac{\partial x^\mu}{\partial x^m}\bigg|_{x=x(q)} \right) \;=\; e^\mu\,, \end{aligned} \tag{IV.46}$$

wobei e^μ den kanonischen Basisvektor in die μ. Koordinatenrichtung notiert. Setzen wir zu $v = (v^1, \ldots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ auch

$$f_w := w^1 \cdot \underline{x}^1 + w^2 \cdot \underline{x}^2 + \ldots + w^m \cdot \underline{x}^m \,, \tag{IV.47}$$

so ist nach (IV.46)

$$\Theta^*_{\phi,q}[f_w]^* \;=\; \sum_{\mu=1}^m w^\mu \cdot \underline{x}^\mu \;=\; w \,, \tag{IV.48}$$

und $\Theta^*_{\phi,q}$ ist auch surjektiv, also bijektiv.

Definition IV.14. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren

$$(+) : T^*_q[\mathcal{M}] \times T^*_q[\mathcal{M}] \to T^*_q[\mathcal{M}] \quad \text{und} \quad (\cdot) : \mathbb{R} \times T^*_q[\mathcal{M}] \to T^*_q[\mathcal{M}] \tag{IV.49}$$

durch

$$[\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}] \;:=\; \Theta^{-1}_{\phi,q}\Big(\Theta_{\phi,q}[\gamma] \;+\; \lambda \cdot \Theta_{\phi,q}[\tilde{\gamma}]\Big) \,. \tag{IV.50}$$

Lemma IV.15. Die Abbildungen $(+)$ und $(\cdot)$ in Definition IV.14 sind wohldefiniert, und $T^*_q[\mathcal{M}]$ ist bezüglich dieser Verknüpfungen ein reeller Vektorraum der Dimension m.

Wir verzichten auf den Beweis von Lemma IV.15, leiten aber die (IV.15) entsprechende Identität her. Seien $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$. Aus (IV.47)-(IV.48) erhalten wir, dass für alle $w \in \mathbb{R}^m$

$$(\Theta^*_{\phi,q})^{-1}[w] \;=\; [f_w]^* \;=\; \Big[\sum_{\mu=1}^m w^\mu \cdot \underline{x}^\mu\Big]^* \,. \tag{IV.51}$$

Für $\mu \in \mathbb{Z}_1^m$ ist also

$$\begin{aligned} \Big(\Theta^*_{\psi,q} \circ (\Theta^*_{\phi,q})^{-1}[w]\Big)_\mu \;&=\; \big(\Theta^*_{\psi,q}[f_w]^*\big)_\mu \;=\; \big(J_{f_w \circ \underline{y}^{-1}}[\underline{y}(q)]\big)_\mu \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\Big[\sum_{\tau=1}^m w_\tau \, \underline{x}^\tau[\underline{y}^{-1}(\xi)]\Big]\Big|_{\xi = \underline{y}(q)}\right)_\mu \;=\; \sum_{\tau=1}^m w_\tau \, \big(J_{\underline{x} \circ \underline{y}^{-1}}[\underline{y}(q)]\big)_{\tau,\mu} \,, \end{aligned} \tag{IV.52}$$

was gleichwertig ist mit

$$\Theta^*_{\psi,q} \circ (\Theta^*_{\phi,q})^{-1} \;=\; J^T_{\underline{x} \circ \underline{y}^{-1}}[\underline{y}(q)] \;=\; \left(\frac{\partial\big(\underline{x}^j[\underline{y}^{-1}(y)]\big)}{\partial y^i}\bigg|_{y = \underline{y}(q)}\right)_{i,j=1}^m \,, \tag{IV.53}$$

wobei A^T die zu A transponierte Matrix ist.

Definition IV.16. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq M$ offen und nichtleer.

(i) Wir definieren die Mengen

$$T^*[\mathcal{M}] \;:=\; \bigsqcup_{q\in M} T_q^*[\mathcal{M}] \;:=\; \bigcup_{q\in M} \Big(\{q\} \times T_q^*[\mathcal{M}]\Big)\,, \tag{IV.54}$$

$$T[U] \;:=\; \bigsqcup_{q\in U} T_q^*[\mathcal{M}] \;:=\; \bigcup_{q\in U} \Big(\{q\} \times T_q[\mathcal{M}]\Big) \;\subseteq\; T[\mathcal{M}]\,. \tag{IV.55}$$

(ii) Ist $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ eine Karte, so definieren wir für $f \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$

$$\Theta_\phi : T^*[U] \;\to\; \underline{x}(U) \times \mathbb{R}^m\,, \quad \big(q, [f]^*\big) \;\mapsto\; \big(\underline{x}(q), \Theta_{\phi,q}[f]^*\big)\,. \tag{IV.56}$$

(iii) Wir definieren auf $T^*[\mathcal{M}]$ eine Topologie durch

$$\mathfrak{T}_{T^*[\mathcal{M}]} \;:=\; \Big\{\big(\Theta_\phi^*\big)^{-1}(V) \;\Big|\; \phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}\,,\; V \subseteq \underline{x}(U) \times \mathbb{R}^m \text{ offen}\Big\}\,. \tag{IV.57}$$

Lemma IV.17. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ zwei miteinander verträgliche Karten von $\mathcal{M}$. Dann sind $\big(T^*[U], \Theta_\phi^*\big)$ und $\big(T^*[V], \Theta_\psi^*\big)$ zwei miteinander verträgliche Karten von $T^*[\mathcal{M}]$.

Definition IV.18. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$. Die Mannigfaltigkeit $T^*[\mathcal{M}] = \big(T^*[M], \mathfrak{T}_{T^*[\mathcal{M}]}, T^*[\mathcal{A}]\big)$ der Dimension $2m$ bezeichnen wir als **Kotangentenbündel von $\mathcal{M}$**, wobei

$$T^*[\mathcal{A}] \;:=\; \Big\{\big(T^*[U],\, \Theta_\phi^*\big) \;\Big|\; \phi = (U, \underline{x}) \;\in\; \mathcal{A}\Big\}\,. \tag{IV.58}$$

IV.3. Der Dualraum eines reellen Vektorraums

Wir erinnern als Nächstes an den Begriff des Dualraums eines reellen Vektorraums, wobei wir den komplexen Fall nur deswegen nicht behandeln, weil er in dieser Vorlesung keine Rolle spielt (und nicht, weil dieser Fall wäre). Wir nehmen im Weiteren an, dass $\big(E, \|\cdot\|\big)$ ein reeller Banachraum ist, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die nun eingeführten Begriffe lassen sich auch für allgemeine topologischer Vektorräume einführen, worauf wir jedoch verzichten.

Ist $\big(E, \|\cdot\|\big)$ ein reeller Banachraum, so nennen wir

$$E^* \;:=\; \mathcal{B}(E; \mathbb{R}) \;=\; \big\{x^* : E \to \mathbb{R} \;\big|\; x^* \text{ ist linear und stetig}\big\} \tag{IV.59}$$

den **(topologischen) Dualraum von $\boldsymbol{E}$**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Es ist üblich, für $x^* \in E^*$ und $x \in E$

$$x^*(x) \;=:\; \langle x^*\,,\, x\rangle \tag{IV.60}$$

zu schreiben.

- Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die Forderung der Stetigkeit an $x^* \in E^*$ obsolet, denn in diesem Fall sind alle linearen Abbildungen stetig.
- Da E ein normierter Raum ist, ist E^* als Raum der beschränkten linearen Operatoren von E nach $\mathbb{R}$ selbst ein Banachraum mit Norm
$$\|x^*\|_{E^*} \;=\; \sup\Big\{ \big|\langle x^*, x\rangle\big| : \; x \in E\,,\; \|x\| \leq 1 \Big\}. \tag{IV.61}$$
- Sind E und F zwei reelle Banachräume und $L \in \mathcal{B}(E;F)$, so wird für festes $y^* \in F^*$ durch $x \mapsto \langle x^*, Lx\rangle$ eine stetige lineare Abbildung $E \to \mathbb{R}$ definiert. Diese bezeichnet man als **zu L transponierte Abbildung $L^T : F^* \to E^*$**, sodass
$$\forall\, y^* \in F^*,\; x \in E: \quad \langle L^T y^*\,,\, x\rangle \;=\; \langle y^*\,,\, Lx\rangle\,. \tag{IV.62}$$
- Sind weiterhin $\dim(E) = m \in \mathbb{N}$ und $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq E$ eine Basis, so ist auch $\dim(E^*) = m$, und es existiert eine eindeutige Basis $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ so, dass
$$\forall\, i,j \in \mathbb{Z}_1^m: \quad \langle e_i^*, e_j\rangle \;=\; \delta_{i,j}\,. \tag{IV.63}$$
Dies ist leicht einzusehen:
  - Jeder Vektor $x \in E$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$. Wir definieren $e_i^* \in E^*$ durch $\langle e_i^*, x\rangle := \alpha_i$, für $i \in \mathbb{Z}_1^m$. Dann ist e_i^* offensichtlich linear, und $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ erfüllt (IV.63).
  - Ist $\beta_1 e_1^* + \ldots + \beta_m e_m^* = 0$, so folgt aus (IV.63) für jedes $j \in \mathbb{Z}_1^m$, dass $0 = \langle \beta_1 e_1^* + \ldots + \beta_m e_m^*\,,\, e_j\rangle = \beta_j$, und $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ ist linear unabhängig.
  - Schließlich ist $\ell^* \in E^*$ eindeutig bestimmt durch die Bilder $\gamma_1 := \langle \ell^*, e_1\rangle, \ldots, \gamma_m := \langle \ell^*, e_m\rangle$ der Basisvektoren $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*$, und wir erhalten $\ell^* = \gamma_1 e_1^* + \ldots + \gamma_m e_m^* \in \mathrm{span}\big[\{e_1^*, \ldots, e_m^*\}\big]$.
- Schließlich bemerken wir, dass ein Basiswechsel $L \in \mathcal{B}(E;E)$, $\det[L] \neq 0$, den Basiswechsel $(L^{-1})^T \in \mathcal{B}(E^*;E^*)$ in E^* induziert.
  - Sind nämlich $\hat{e}_1 = Le_1, \ldots, \hat{e}_m = Le_m$ und $\{\hat{e}_1^*, \ldots, \hat{e}_m^*\} \subseteq E^*$ die Basis mit $\langle \hat{e}_i^*, \hat{e}_j\rangle = \delta_{i,j}$, so gilt
$$\delta_{i,j} \;=\; \langle \hat{e}_i^*, \hat{e}_j\rangle \;=\; \langle \hat{e}_i^*, Le_j\rangle \;=\; \langle L^T \hat{e}_i^*, e_j\rangle\,, \tag{IV.64}$$
für alle $i,j \in \mathbb{Z}_1^m$.
  - Daraus folgt, dass $L^T \hat{e}_i^* = e_i$ bzw. $\hat{e}_i^* = (L^T)^{-1} e_i = (L^{-1})^T e_i$.
- Für $\big(E, \|\cdot\|\big) = \big(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{\mathrm{eukl}}\big)$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ sind $(\mathbb{R}^m)^* = \mathbb{R}^m$ und $\langle e_i^*, \cdot\rangle = \langle e_i|\cdot\rangle_{\mathrm{eukl}}$.

Definition IV.19. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $\phi = (U, x) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Sei weiterhin $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ die Standardbasis. Für $i,j \in \mathbb{Z}_1^m$ setzen wir
$$\frac{\partial}{\partial x^j} \;:=\; \frac{\partial}{\partial x^j(q)} \;:=\; \Theta_{\phi,q}^{-1}(e_j) \;\in\; T_q[\mathcal{M}]\,, \tag{IV.65}$$
$$dx^i \;:=\; dx^i(q) \;:=\; (\Theta_{\phi,q}^*)^{-1}(e_i) \;\in\; T_q^*[\mathcal{M}]\,. \tag{IV.66}$$

Lemma IV.20.

(i) Die Teilmengen $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\} \subseteq T_q[\mathcal{M}]$ und $\left\{dx^1, \ldots, dx^m\right\} \subseteq T_q^*[\mathcal{M}]$ sind Basen.

(ii) Für $f \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$ und $\gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ sei

$$\big\langle [f]^* \,,\, [\gamma] \big\rangle \;:=\; \Big\langle \Theta^*_{\phi,q}[f]^* \,\Big|\, \Theta_{\phi,q}[\gamma] \Big\rangle_{\mathrm{eukl}} . \tag{IV.67}$$

Dann ist

$$\big(T_q[\mathcal{M}]\big)^* \;=\; T_q[\mathcal{M}]^* , \tag{IV.68}$$

und es gilt

$$\forall\, i,j \in \mathbb{Z}_1^m : \qquad \Big\langle dx^i \,,\, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big\rangle \;=\; \delta_{i,j} . \tag{IV.69}$$

Beweis. (i): folgt sofort aus der Tatsache, dass $\Theta_{\phi,q} : T_q[\mathcal{M}] \to \mathbb{R}^m$ und $\Theta^*_{\phi,q} : T_q[\mathcal{M}]^* \to \mathbb{R}^m$ Isomorphismen sind.

(ii): Die Linerarität von $\Theta_{\phi,q}$ und $\Theta^*_{\phi,q}$ sowie die Bilinearität des euklidschen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^m$ sichern, dass (IV.67) ein lineares Funktional auf $T_q[\mathcal{M}]$ definiert, d.h. es gelten $[f]^* \in \big(T_q[\mathcal{M}]\big)^*$ und deshalb auch $T_q[\mathcal{M}]^* \subseteq \big(T_q[\mathcal{M}]\big)^*$. Da beide Vektorräume Dimension m haben, müssen sie gleich sein, und es folgt (IV.68).

Glg. (IV.69) ergibt sich aus

$$\Big\langle dx^i \,,\, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big\rangle \;=\; \Big\langle (\Theta^*_{\phi,q})^{-1}(e_i) \,,\, \Theta^{-1}_{\phi,q}(e_j) \Big\rangle \;=\; \langle e_i | e_j \rangle_{\mathrm{eukl}} \;=\; \delta_{i,j} . \tag{IV.70}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Mit $f \in \widetilde{T}_q^*[\mathcal{M}]$, $\gamma \in \widetilde{T}_q[\mathcal{M}]$ und $\phi = (U, \underline{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$ ist

$$\begin{aligned} \big\langle [f]^* \,,\, [\gamma] \big\rangle \;&=\; \Big\langle \Theta^*_{\phi,q}[f]^* \,\Big|\, \Theta_{\phi,q}[\gamma] \Big\rangle_{\mathrm{eukl}} \;=\; \Big\langle J_{f\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)] \,\Big|\, \frac{d}{dt}\big(\underline{x}\circ\gamma\big)\big|_{t=0} \Big\rangle_{\mathrm{eukl}} \\ &=\; \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial (f\circ \underline{x}^{-1})[\xi]}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi=\underline{x}(q)} \frac{d}{dt}\big(\underline{x}^\mu \circ\gamma\big)\big|_{t=0} \Big\rangle_{\mathrm{eukl}} \;=\; \frac{d}{dt}\Big(f\circ\gamma\Big)\Big|_{t=0} , \end{aligned} \tag{IV.71}$$

  nach der Kettenregel. In (IV.71) ist die Kartenunabhängigkeit manifest.

- Sind $\phi = (U, \underline{x}), \psi = (V, \underline{y}) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$, so ist, für alle $j \in \mathbb{Z}_1^m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{y}^j} \;&=\; \Theta^{-1}_{\psi,q}[e_j] \;=\; \Theta^{-1}_{\phi,q} \circ \big(\Theta_{\phi,q} \circ \Theta^{-1}_{\psi,q}\big)[e_j] \;=\; \Theta^{-1}_{\phi,q}\big(J_{\underline{x}\circ\underline{y}^{-1}}[\underline{y}(q)]\big)[e_j] \\ &=\; \sum_{i=1}^m \big(J_{\underline{x}\circ\underline{y}^{-1}}[\underline{y}(q)]\big)_{j,i}\, \Theta^{-1}_{\phi,q}[e_i] \;=\; \sum_{i=1}^m \frac{\partial\big(\underline{x}^i[\underline{y}^{-1}(y)]\big)}{\partial y^j}\Big|_{y=\underline{y}(q)} \frac{\partial}{\partial x^i} . \end{aligned} \tag{IV.72}$$

- Genauso erhalten wir

$$\begin{aligned} dy^i(q) &= \left(\Theta^*_{\psi,q}\right)^{-1}[e_i] = \left(\Theta^*_{\phi,q}\right)^{-1} \circ \left[\Theta^*_{\phi,q} \circ \left(\Theta^*_{\psi,q}\right)^{-1}\right][e_i] = \left(\Theta^*_{\phi,q}\right)^{-1} \circ \left(J_{\underline{y}\circ\underline{x}^{-1}}[\underline{x}(q)]\right)[e_i] \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\left(\underline{y}^i[\underline{x}^{-1})(x)]\right)}{\partial x^j}\bigg|_{x=\underline{x}(q)} dx^j(q)\,. \end{aligned} \tag{IV.73}$$

- Die Definitionen der Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^j(q)} \in T_q[\mathcal{M}]$ und $dx^i(q) \in T^*_q[\mathcal{M}]$ stellen also gleichzeitig eine Merkregel für ihre Transformation unter Kartenwechsel dar.