

III. Immersionen und Einbettungen

III.1. Immersionen als Abbildung vollen Ranges

Definition III.1. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $m = \dim(\mathcal{M})$ bzw. $n = \dim(\mathcal{N})$ und $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$.

- (i) Sind $p \in M$ und $(U, x) \in \mathcal{A}$ und $(V, y) \in \mathcal{B}$ so, dass $p \in U \cap f^{-1}(V)$, so heißt

$$\text{rk}[f](p) := \text{rk}[J_{y \circ f \circ x^{-1}}(x(p))] \quad (\text{III.1})$$

Rang von f bei p .

- (ii) Die Funktion f heißt **Immersion (von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$)** $:\Leftrightarrow$

$$\forall p \in M : \text{rk}[f](p) = m. \quad (\text{III.2})$$

- (iii) Die Funktion f heißt **Einbettung (von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$)** $:\Leftrightarrow$

Die Funktion f ist eine injektive Immersion und $f : (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (N, \mathfrak{S})$ ist ein Homöomorphismus.

- (iv) Die Funktion f heißt **Submersion (von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{N}$)** $:\Leftrightarrow$

$$\forall p \in M : \text{rk}[f](p) = n. \quad (\text{III.3})$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wie üblich ist der Rang von f bei $p \in M$ unabhängig von den gewählten Karten $(U, x) \in \mathcal{A}$ und $(V, y) \in \mathcal{B}$ und insofern wohldefiniert.
- Ist $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ eine Immersion, so ist $m \leq n$, da $\text{rk}[f] \leq \min\{m, n\}$.
- Ist $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ eine Submersion, so ist $m \geq n$, abermals wegen $\text{rk}[f] \leq \min\{m, n\}$.

III.2. Matrizen festen Ranges

Im Folgenden seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$, und wir betrachten reelle $n \times m$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (\text{III.4})$$

Zu jedem Paar (I, J) von Teilmengen $I = \{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, mit $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \dots, j(k')\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ bezeichnen wir mit $A(I, J) \in \mathbb{R}^{k \times k'}$ die reelle $k \times k'$ -Matrix

$$A(I, J) := \begin{pmatrix} a_{i(1),j(1)} & \cdots & a_{i(1),j(k')} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i(k),j(1)} & \cdots & a_{i(k),j(k')} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

Lemma III.2. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine reelle $n \times m$ -Matrix. Dann gilt

$$\text{rk}[A] \geq k \Leftrightarrow \exists I \subseteq \mathbb{Z}_1^n \ J \subseteq \mathbb{Z}_1^m \ |I| = |J| = k : \det[A(I, J)] \neq 0. \quad (\text{III.6})$$

Beweis. $\Rightarrow$: Ist $\text{rk}[A] \geq k$, so ist insbesondere der Spaltenrang von A mindestens gleich k und es gibt (mindestens) k linear unabhängige Spaltenvektoren $\vec{b}_{j(1)}, \vec{b}_{j(2)}, \dots, \vec{b}_{j(k)}$, wobei $1 \leq j(1) < j(2) < \dots < j(k) \leq m$ und

$$\vec{b}_j := \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

Dies ist gleichwertig mit der Aussage, dass die $n \times k$ -Matrix

$$A(\mathbb{Z}_1^n, J) := \begin{pmatrix} a_{1,j(1)} & \cdots & a_{1,j(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,j(1)} & \cdots & a_{n,j(k)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

vom Rang $\text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, J)] = k$ ist, wobei $J = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$. Dies zieht jedoch die Existenz einer solchen Menge $I = \{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, mit $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n$, nach sich, dass der Rang der $k \times k$ -Matrix $A(I, J)$ gleich k und sie somit invertibel ist, was $\det[A(I, J)] \neq 0$ impliziert.

$\Leftarrow$: Seien $\det[A(I, J)] \neq 0$, wobei $I = \{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$, $1 \leq j(1) < j(2) < \dots < j(k) \leq m$. Mit der Notation aus Glg. (III.7) ist dann $\{\vec{b}_{j(1)}, \vec{b}_{j(2)}, \dots, \vec{b}_{j(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine linear unabhängige, k -elementige Teilmenge von Spaltenvektoren in A und der Rang von A ist mindestens gleich k . $\square$

Korollar III.3. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine reelle $n \times m$ -Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\text{rk}[A] = k$;
- (ii) Es gibt $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I| = |J| = k$ so, dass $\det[A(I, J)] \neq 0$, und für alle $I' \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J' \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I'| = |J'| = k+1$ gilt $\det[A(I', J')] = 0$.
- (iii) Es gibt $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I| = |J| = k$ so, dass $\det[A_{I,J}] \neq 0$, und für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_1^n \setminus I$ und $\beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J$ gilt $\det[A_{I \cup \{\alpha\}, J \cup \{\beta\}}] = 0$.

Beweis. Lemma III.2 impliziert, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und trivialerweise gilt auch (ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Aussage folgt also, wenn wir (iii) $\Rightarrow$ (i) zeigen. Dazu können wir $k+1 \leq \min\{m, n\}$ annehmen, denn für $k = \min\{m, n\}$ gibt es nichts zu beweisen.

Seien also $I = \{i(1), i(2), \dots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, $1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$, $1 \leq j(1) < j(2) < \dots < j(k) \leq m$, so, dass $\det[A(I, J)] \neq 0$ sowie $\beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J$. Nach geeigneter Zeilen- und Spaltenvertauschung können wir o.B.d.A. annehmen, dass $I = J = \mathbb{Z}_1^k$ und $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$ sind. Für $i \in \mathbb{Z}_1^n$ setzen wir nun

$$\vec{c}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k}, a_{i,\beta}) \in \mathbb{R}^{k+1} \quad (\text{III.9})$$

Dann ist $\det[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)] \neq 0$ und demgemäß ist

$$A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

eine Matrix vom Rang $\text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = k$ und deshalb $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k) := \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ linear unabhängig. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ folgt aus (iii), dass

$$0 = \det[A(\mathbb{Z}_1^k \cup \{\alpha\}, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,\beta} \\ a_{\alpha,1} & \cdots & a_{\alpha,k} & a_{\alpha,\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_\alpha \end{vmatrix}, \quad (\text{III.11})$$

und deshalb ist $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k) \cup \{\vec{c}_\alpha\}$ linear abhängig. Es folgt, dass $\vec{c}_\alpha \in \text{span}[\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k)]$. Da $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ beliebig ist, erhalten wir, dass

$$\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k, \vec{c}_{k+1}, \dots, \vec{c}_n \in \text{span}[\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k)] \quad (\text{III.12})$$

und somit

$$\forall \beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m : \quad \text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = \text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k)] = k. \quad (\text{III.13})$$

Setzen wir wieder

$$\vec{b}_j := \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

so sind $A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ und wegen $\text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k)] = k$ die Menge $\mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k] := \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. Weiterhin sind wegen $\text{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = k$ die Menge $\mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k] \cup \{\vec{b}_\beta\}$ linear abhängig und deshalb $\vec{b}_\beta \in \mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k]$, für alle $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$. Wir erhalten

$$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n \in \text{span}[\mathcal{B}(\mathbb{Z}_1^k)] \quad (\text{III.15})$$

und somit

$$\text{rk}[A] = \text{rk}[(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n)] = k. \quad (\text{III.16})$$

□

Satz III.4. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und

$$\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \text{rk}[A] = k\}, \quad (\text{III.17})$$

$$\mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m} := \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \text{rk}[A] \geq k\}. \quad (\text{III.18})$$

Dann ist $\mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m} \subseteq \mathbb{R}^{n \times m}$ offen und $\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} \subseteq \mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m}$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times m}$ der Dimension $k(m + n - k)$.

Beweis. Gemäß Lemma III.2 ist

$$\mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m} = \bigcup_{I \subseteq \mathbb{Z}_1^n, J \subseteq \mathbb{Z}_1^m, |I|=|J|=k} \mathcal{E}(I, J), \quad \text{wobei} \quad (\text{III.19})$$

$$\mathcal{E}(I, J) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \det[A(I, J)] \neq 0\}. \quad (\text{III.20})$$

Die Mengen $\mathcal{E}(I, J) \subseteq \mathbb{R}^{n \times m}$ sind offen und damit auch $\mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m} \subseteq \mathbb{R}^{n \times m}$. Trivialerweise ist $\mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m} \subseteq \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n \cdot m$.

Weiterhin ist $\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} = \mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m}$ im Fall, dass $k = \min\{m, n\}$, und wir können o.B.d.A. im Weiteren $k + 1 \leq \min\{m, n\}$ annehmen. Nach Lemma III.3 (iii) ist

$$\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} = \bigcup_{I \subseteq \mathbb{Z}_1^n, J \subseteq \mathbb{Z}_1^m, |I|=|J|=k} \mathcal{L}(I, J), \quad \text{wobei} \quad (\text{III.21})$$

$$\mathcal{L}(I, J) := \left\{ A \in \mathcal{E}(I, J) \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^n \setminus I, \beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J : \det[A(I \cup \{\alpha\}, J \cup \{\beta\})] = 0 \right\}. \quad (\text{III.22})$$

Sind etwa $I = J = \mathbb{Z}_1^k$, so definieren wir $F_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ und $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$ durch

$$F_{\alpha, \beta}(A) = \det[A(\mathbb{Z}_1^k \cup \{k + \alpha\}, \mathbb{Z}_1^k \cup \{k + \beta\})] = \det \left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,\beta} \\ a_{\alpha,1} & \cdots & a_{\alpha,k} & a_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{III.23})$$

und weiterhin $F : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times (m-k)}$ durch

$$F(A) := (F_{\alpha,\beta}(A))_{\alpha \in \mathbb{Z}_1^{n-k}, \beta \in \mathbb{Z}_1^{m-k}} = \begin{pmatrix} F_{1,1}(A) & \cdots & F_{1,m-k}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-k,1}(A) & \cdots & F_{n-k,m-k}(A) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.24})$$

Nach dem Leibnizschen Entwicklungssatz ist

$$F_{\alpha,\beta}(A) = a_{\alpha,\beta} \cdot \det[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)] + R(A) \quad (\text{III.25})$$

wobei $R(A)$ von Matrixelementen $a_{i,j}$ abhängt, für die $(i \leq k) \vee (j \leq k)$ gilt. Für $i, \alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ und $j, \beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$ ist also

$$\frac{\partial F_{\alpha,\beta}(A)}{\partial a_{i,j}} = \delta_{i,\alpha} \delta_{j,\beta} \det[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)]. \quad (\text{III.26})$$

Da $\det[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)] \neq 0$ auf $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)$ ist, folgt daraus

$$\forall A \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k) : \quad \text{rk}[J_F(A)] = (n-k)(m-k), \quad (\text{III.27})$$

und dass J_F auf $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)$ somit maximalen Rang besitzt. Nach Korollar II.17 ist damit

$$\mathcal{L}(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k) = \left\{ A \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k) \mid \text{rk}[F(A)] = 0 \right\} \quad (\text{III.28})$$

und entsprechend auch $\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} = \bigcup_{I \subseteq \mathbb{Z}_1^n, J \subseteq \mathbb{Z}_1^m, |I|=|J|=k} \mathcal{L}(I, J) \subseteq \mathbb{R}_{\text{rk} \geq k}^{n \times m}$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim [\mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m}] = nm - (n-k)(m-k) = k(m+n-k). \quad (\text{III.29})$$

□

III.3. Immersions- und Einbettungssätze

Lemma III.5. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer und $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\max_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} |a_{i,j}| \leq \varepsilon$ so, dass mit $f_A(x) = f(x) + Ax$ die Funktion $f_A \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ eine Immersion ist.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $m \geq 2$, der Fall $m = 1$ ist eine Übungsaufgabe. Wir bezeichnen mit $J := J_f$ die Jacobi-Matrix von f und mit $J_A := J + A$ die Jacobi-Matrix von A . Es ist zu zeigen, dass eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ existiert, sodass

$$\forall x \in \Omega : \quad \text{rk}[J_A(x)] = m \quad \text{und} \quad \forall i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m : \quad |a_{i,j}| \leq \varepsilon. \quad (\text{III.30})$$

Wir fixieren $k \in \mathbb{Z}_1^{m-1}$ und betrachten die Abbildung $F_k \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m}; \mathbb{R}^{n \times m})$,

$$(x, B) \mapsto F_k(x, B) := B - J(x). \quad (\text{III.31})$$

Da $m - k \geq 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \dim[\mathbb{R}^{n \times m}] - \dim[\Omega \times \mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m}] &= mn - \{m + k(m + n - k)\} = mn - m - km - kn + k^2 \\ &= (n - k)(m - k) - m \geq (2m - k)(m - k) - m \geq (m + 1) \cdot 1 - m = 1. \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Da F_k stetig differenzierbar ist, ist das (nm) -dimensionale Lebesgue-Maß des Bildes von F_k gleich null, für alle $k \in \mathbb{Z}_1^{m-1}$, und wir erhalten

$$\mu_{\mathbb{R}^{n \times m}}[W] = 0, \quad \text{wobei} \quad W := \bigcup_{k=1}^{m-1} F_k(\Omega \times \mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m}). \quad (\text{III.33})$$

In diese Aussage geht die stetige Differenzierbarkeit von F_k in subtiler Weise ein, was wir jedoch aus Zeitmangel nicht näher erläutern; wir erinnern aber an Satz II.4, der zeigt, dass die bloße Stetigkeit der Abbildung F_k für (III.33) nicht ausreichen würde.

Aus (III.33) folgt insbesondere, dass $W \subseteq \mathbb{R}^{n \times m}$ keine inneren Punkte enthält, und wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in W^c$ mit $\max_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} |a_{i,j}| \leq \varepsilon$ finden. Aus der Definition (III.33) von W folgt dann, dass

$$\forall k \in \mathbb{Z}_1^{m-1}, \quad x \in \Omega, \quad B \in \mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m} : \quad A \neq B - J(x), \quad (\text{III.34})$$

was nach Auflösen zu $J_A(x) = J(x) + A \neq B$ impliziert, dass

$$J_A(x) \notin \bigcup_{k=1}^{m-1} \mathbb{R}_{\text{rk}=k}^{n \times m}, \quad \text{also} \quad J_A(x) \in \mathbb{R}_{\text{rk}=m}^{n \times m} \quad (\text{III.35})$$

für jedes $x \in \Omega$ gilt. Dies bedeutet jedoch, dass $\text{rk}[F_A] = m$ auf Ω ist. $\square$

Lemma III.6. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m und $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathbb{R}^{n+1})$ mit $n \geq m + 1$. Sind $(U, x) \in \mathcal{A}$, $K \subseteq U$ kompakt und $\text{rk}[f] = m$ auf K , so gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall h \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1}), \quad \max_{q \in K} \|J_{h \circ x^{-1}}[x(q)]\|_{\text{op}} \leq \delta : \quad \text{rk}[f + h] = m \quad \text{auf } K. \quad (\text{III.36})$$

Beweis. Wir führen die Notation $J^{(f)} = (J_{i,j}^{(f)})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} := J_{f \circ x^{-1}} \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ein und bezeichnen mit $J_I^{(f)} := (J_{i,j}^{(f)})_{i \in I, j \in \mathbb{Z}_1^m} : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, für jede Teilmenge $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ mit $|I| = m$. Nach Voraussetzung ist $\text{rk}[J^{(f)}(q)] = m$ und deshalb auch

$$D(q) := \max \{ |\det[J_I^{(f)}(q)]| \mid I \subseteq \mathbb{Z}_1^n, |I| = m \} > 0, \quad (\text{III.37})$$

für alle $q \in K$. Die Abbildung $D : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist stetig und nimmt deshalb auf K ein positives Minimum $2\varepsilon := \min_{q \in K} D(q) > 0$ an. Für jedes $q \in K$ gibt es also ein $I(q) \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ mit $|I(q)| = m$ und $|\det[J_{I(q)}^{(f)}(q)]| \geq 2\varepsilon$. Definieren wir nun

$$V_q := \{p \in U : |\det[J_{I(q)}^{(f)}(p)]| > \varepsilon\}, \quad (\text{III.38})$$

so ist $\{V_q\}_{q \in K}$ eine offene Überdeckung von K , die wegen deren Kompaktheit eine endliche offene Überdeckung enthält, d.h. es gibt $L \in \mathbb{N}$ und $q(1), q(2), \dots, q(L) \in K$ so, dass

$$K = \bigcup_{\ell=1}^L K_\ell, \quad \text{wobei} \quad K_\ell := K \cap \overline{V_{q(\ell)}} \quad \text{und} \quad |\det[J_{I(\ell)}^{(f)}]| \geq \varepsilon \quad \text{auf} \quad K_\ell \quad (\text{III.39})$$

mit $I(\ell) := I(q(\ell))$ gilt. Insbesondere erhalten wir, dass $J_{I(\ell)}^{(f)}$ auf dem Kompaktum K_ℓ invertibel ist und

$$\Lambda := \max \left\{ \|(J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1}\|_{\text{op}} \mid \ell \in \mathbb{Z}_1^L, q \in K_\ell \right\} < \infty. \quad (\text{III.40})$$

Glg. (III.40) kann beispielsweise direkt über die Darstellung der Inversen einer $m \times m$ -Matrix mit Hilfe der Matrix der Minoren gewonnen werden.

Ist nun $h \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})$ mit

$$\max \left\{ \|J_{I(\ell)}^{(h)}(q)\|_{\text{op}} \mid \ell \in \mathbb{Z}_1^L, q \in K_\ell \right\} \leq \delta := \frac{1}{2\Lambda}, \quad (\text{III.41})$$

so setzen wir

$$R_\ell(q) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1} \left[J_{I(\ell)}^{(h)}(q) \cdot (J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1} \right]^k \quad (\text{III.42})$$

und beobachten, dass diese Reihe in Norm konvergiert, da

$$\begin{aligned} \|R_\ell(q)\|_{\text{op}} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| (J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1} \left[J_{I(\ell)}^{(h)}(q) \cdot (J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1} \right]^k \right\|_{\text{op}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| (J_{I(\ell)}^{(f)}(q))^{-1} \right\|_{\text{op}}^{k+1} \|J_{I(\ell)}^{(h)}(q)\|_{\text{op}}^k \leq \Lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2\Lambda < \infty. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Außerdem sieht man leicht, dass

$$R_\ell(q) \cdot J_{I(\ell)}^{(f+h)}(q) = R_\ell(q) \cdot J_{I(\ell)}^{(f)}(q) + R_\ell(q) \cdot J_{I(\ell)}^{(h)}(q) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \quad (\text{III.44})$$

und analog $J_{I(\ell)}^{(f+h)}(q) \cdot R_\ell(q) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}$, d.h.

$$R_\ell(q) = (J_{I(\ell)}^{(f+h)}(q))^{-1} \quad (\text{III.45})$$

und $\text{rk}[f+h] = m$ auf K_ℓ . Fügen wir dies für alle $\ell \in \mathbb{Z}_1^L$ zusammen, erhalten wir $\text{rk}[f+h] = m$ auf K . $\square$

Satz III.7. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension m , $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2m$ und $\psi \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}^+)$. Dann existiert eine Immersion $g \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^n$ so, dass

$$\forall q \in M : \quad \|f(q) - g(q)\| \leq \psi(q). \quad (\text{III.46})$$

Beweis. Nach Satz II.11 gibt es kompakte Mengen $K_r \subseteq \overset{\circ}{K}_{r+1}$ so, dass $M = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$. Wir verwenden im Weiteren den Beweis von Satz II.13, dem gemäß es weiterhin eine Partition $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq C^\infty(\mathcal{M}; [0, 1])$ der Eins, $\{q_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq M$, $\{\varepsilon_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ und $\{(U_\ell, x_\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$, $\xi_\ell := x_\ell(q_\ell)$ so gibt, dass

$$\chi_\ell \equiv 1 \text{ auf } \overline{V'_\ell}, \quad \text{mit } V'_\ell := x_\ell^{-1}[B(\xi_\ell, \varepsilon_\ell)], \quad (\text{III.47})$$

$$\text{supp}[\chi_\ell] \subseteq V_\ell := x_\ell^{-1}[B(\xi_\ell, 3\varepsilon_\ell)], \quad (\text{III.48})$$

$$K_{r+1} \setminus \overset{\circ}{K}_r \subseteq \bigcup_{\ell=L(r)+1}^{L(r+1)} V'_\ell \subseteq \bigcup_{\ell=L(r)+1}^{L(r+1)} V_\ell \subseteq \overset{\circ}{K}_{r+2} \setminus K_{r-1}. \quad (\text{III.49})$$

Sei $\delta_1 > 0$. Gemäß Lemma III.5 existiert $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\|A_1\|_\infty \leq \delta_1$ so, dass

$$\tilde{f}_1 : B(\xi_1, 3\varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}_1(\xi) := f[x_1^{-1}(\xi)] + A_1(\xi - \xi_1) \quad (\text{III.50})$$

eine Immersion ist, $\text{rk}[\tilde{f}_1] = m$. Dann setzen wir

$$f_1(q) := f[q] + \chi_1(q) \cdot A_1[x_1(q) - \xi_1], \quad (\text{III.51})$$

für $q \in M$ und beobachten, dass $f_1 = \tilde{f}_1 \circ x_1$ auf V'_1 und daher

$$\text{rk}[f_1] = \text{rk}[\tilde{f}_1 \circ x_1] = m \quad (\text{III.52})$$

auf $\overline{V'_1}$. Für jedes $q \in M$ ist weiterhin

$$\frac{\|f_1[q] - f[q]\|}{\psi(q)} \leq \max_{\xi \in B(\xi_1, 3\varepsilon_1)} \left\{ \frac{\|A_1(\xi - \xi_1)\|}{\psi[x_1^{-1}(\xi)]} \right\} \leq \frac{2\varepsilon_1 \delta_1}{\min_{q \in \overline{W}_1} \{\psi(q)\}} \leq \frac{1}{2}, \quad (\text{III.53})$$

vorausgesetzt, wir wählen

$$\delta_1 := \frac{1}{4} \varepsilon_1 \min_{q \in \overline{W}_1} \{\psi(q)\} > 0. \quad (\text{III.54})$$

Seien nun $L \in \mathbb{N}$ und $f_L \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}^n)$ so definiert, dass

$$\text{rk}[f_L] = m \text{ auf } \bigcup_{\ell=1}^L \overline{V}_\ell \quad \text{und} \quad \forall q \in M : \frac{\|f_L[q] - f[q]\|}{\psi(q)} \leq \sum_{\ell=1}^L 2^{-\ell}. \quad (\text{III.55})$$

Zu $\delta_{L+1} > 0$ existieren gemäß Lemma III.5 $A_{L+1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\|A_{L+1}\|_\infty \leq \delta_{L+1}$ so, dass

$$\text{rk}[\tilde{f}_{L+1}] = m \text{ auf } B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1}), \quad (\text{III.56})$$

wobei

$$\tilde{f}_{L+1} : B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1}) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}_{L+1}(\xi) := f_L[x_{L+1}^{-1}(\xi)] + A_{L+1}(\xi - \xi_{L+1}). \quad (\text{III.57})$$

Mit

$$f_{L+1}(q) := f_L[q] + \chi_{L+1}(q) \cdot A_{L+1}[x_{L+1}(q) - \xi_{L+1}] \quad (\text{III.58})$$

ist dann $f_{L+1} = \tilde{f}_{L+1} \circ x_{L+1}$ auf $\overline{V'_{L+1}}$ und deshalb

$$\text{rk}[f_{L+1}] = m \quad \text{auf} \quad \overline{V'_{L+1}}, \quad (\text{III.59})$$

d.h. $f_{L+1} : V'_{L+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Immersion.

Für alle $q \in M$ ist weiterhin

$$\begin{aligned} \|f_{L+1}[q] - f[q]\| &\leq \|f_{L+1}[q] - f_L[q]\| + \psi(q) \left(\sum_{\ell=1}^L 2^{-\ell} \right) \\ &\leq 3\varepsilon_{L+1} \delta_{L+1} \cdot \mathbf{1}[q \in \overline{W_{L+1}}] + \psi(q) \left(\sum_{\ell=1}^L 2^{-\ell} \right) \leq \psi(q) \left(\sum_{\ell=1}^{L+1} 2^{-\ell} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

vorausgesetzt, wir wählen

$$\delta_{L+1} := \frac{1}{6} 2^{-L} \varepsilon_{L+1} \min_{q \in \overline{W_{L+1}}} \{\psi(q)\} > 0. \quad (\text{III.61})$$

Weiterhin ist für $q \in W_{L+1}$ mit $\xi := x_{L+1}(q) \in B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1})$

$$J^{(f_{L+1})}(q) - J^{(f_L)}(q) = J^{(f_{L+1}-f_L)}(q) = J_{\chi_{L+1} \circ x_{L+1}^{-1}}[A_{L+1}(\xi - \xi_{L+1}) + \chi_{L+1}(q) \cdot A_{L+1}] \quad (\text{III.62})$$

und deshalb

$$\|J^{(f_{L+1})}(q) - J^{(f_L)}(q)\|_{\text{op}} \leq \max_{\xi \in B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1})} \left\{ \|J_{\chi_{L+1} \circ x_{L+1}^{-1}}(\xi)\|_{\text{op}} \right\} \delta_{L+1} \varepsilon_{L+1} + \delta_{L+1}. \quad (\text{III.63})$$

Nach Lemma III.6 kann durch eine genügend kleine Wahl vom $\delta_{L+1} > 0$ also gesichert werden, dass

$$\text{rk}[f_{L+1}] = m \quad \text{auf} \quad \bigcup_{\ell=1}^L \overline{W_{L+1}}. \quad (\text{III.64})$$

Da $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathcal{M}; [0, 1])$ eine lokal endliche Partition der Eins ist, gibt es zu jedem $q \in M$ ein $L_0 \in \mathbb{N}$ und ein $U_q \in \mathfrak{T}(q)$ so, dass

$$\forall L \geq L_0, q' \in U_q : f_L(q') = f_{L_0}(q'). \quad (\text{III.65})$$

Es folgt, dass $g := \lim_{L \rightarrow \infty} f_L$ existiert, glatt ist und die gewünschten Eigenschaften $\text{rk}[g] = m$ und $\|f - g\| \leq \psi$ besitzt. $\square$

Wir stellen noch ohne Beweis den folgenden Satz von Whitney vor.

Satz III.8 (Whitney). Ist $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m , so gibt es eine Einbettung $f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}^{2m+1})$ von $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^{2m+1}$, und $f(M) = \overline{f(M)} \subseteq \mathbb{R}^{2m+1}$ ist abgeschlossen.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir verzichten hier auf den Beweis des Whitney'schen Einbettungssatzes, Satz III.8, und geben uns mit Satz III.7 zufrieden. Gleichwohl lässt sich die Hinzunahme einer weiteren Dimension von $2m$ nach $2m+1$ beim Übergang von einer Immersion zu einer Einbettung an Beispielen plausibel machen.
- In den meisten konkreten Anwendungen haben wir es mit *parametrisierten (Hyper-)Flächen* zu tun. Dies sind Mengen der Form

$$M = \bigcup_{k=1}^K y_k(V_k) \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (\text{III.66})$$

wobei $V_k \subseteq \mathbb{R}^m$ nichtleere offene Mengen (Parameterbereiche) mit $m < d$ und $y_k \in C^\infty(V_k; \mathbb{R}^d)$ injektiv sind.

- Mit $\mathcal{A} = \{(y_k(V_k), y_k^{-1})\}_{k=1}^K$ wird $(M, \mathfrak{T}_{\text{rel}}, \mathcal{A})$ zur m -dimensionalen, in $\mathbb{R}^d$ immersierten oder sogar eingebetteten Mannigfaltigkeit. Satz III.8 sagt also, dass alle Mannigfaltigkeiten von dieser Form sind - oder wenigstens diffeomorph dazu, vorausgesetzt, wir nehmen $d \geq 2m+1$ an.