Vektoranalysis

Prof. Dr. Volker Bach

Technische Universität Braunschweig
Wintersemester 2025/26

27.01.2026

Inhaltsverzeichnis

I. Topologische Grundbegriffe

In diesem ersten Kapitel stellen wir einige Grund legende Definitionen der allgemeinen Topologie vor. Wie üblich bezeichnet $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge einer Menge M, d.h. das System aller Teilmengen von M.

I.1. Topologische Räume

Definition I.1. Sei M eine Menge. Ein System $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ von Teilmengen von M heißt **Topologie (auf *M*)** :⇔

(i)

$$\emptyset, M \;\in\; \mathfrak{T}, \tag{I.1}$$

(ii)

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{T}: \qquad (A \cap B) \;\in\; \mathfrak{T}, \tag{I.2}$$

(iii)

$$\forall\, \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}: \qquad \Big(\bigcup_{A \in S} A \Big) \;\in\; \mathfrak{T}. \tag{I.3}$$

In diesem Fall bezeichnen wir die Elemente von $\mathfrak{T}$ als **offene Mengen (in *M*)** und $(M, \mathfrak{T})$ als **topologischen Raum**.

Eine offene Menge $A \in \mathfrak{T}$, die $x \in A$ enthält, heißt **Umgebung von *x***. Für $x \in M$ bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{T}(x) \;:=\; \big\{ A \in \mathfrak{T} \;\big|\; A \ni x \big\} \tag{I.4}$$

die Familie der Umgebungen von x.

Ein topologischer Raum $(M, \mathfrak{T})$ heißt **hausdorffsch** :⇔

$$\forall\, x, y \in M, \quad x \neq y, \quad \exists\, U \in \mathfrak{T}(x),\; V \in \mathfrak{T}(y): \qquad U \cap V \;=\; \emptyset. \tag{I.5}$$

Definition I.2. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **offen** (s.o.) :⇔

$$A \in \mathfrak{T}. \tag{I.6}$$

(ii) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen** :⇔

$$M \setminus A \in \mathfrak{T}. \tag{I.7}$$

(iii) Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt **kompakt** :⇔

Jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche offene Überdeckung.

$$\Leftrightarrow \qquad \forall\, \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T},\ \Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A \Big) \supseteq K \ \ \exists\, A_1, \ldots, A_L \in \mathfrak{S} : \quad K \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_L. \tag{I.8}$$

Definition I.3. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge.

(i) Die Menge

$$\overline{A} := \bigcap \big\{ U \,\big|\, M \setminus U \in \mathfrak{T},\ U \supseteq A \big\} \tag{I.9}$$

nennt man **Abschluss von $\boldsymbol{A}$**.

(ii) Die Menge

$$A^\circ := \bigcup \big\{ V \,\big|\, V \in \mathfrak{T},\ V \subseteq A \big\} \tag{I.10}$$

nennt man **Inneres von $\boldsymbol{A}$**.

(iii) Die Menge $A \subseteq M$ heißt **dicht (in $\boldsymbol{M}$)**

$$:\Leftrightarrow \qquad \overline{A} = M. \tag{I.11}$$

Definition I.4. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in M$ ein Punkt.

(i) Ein Teilsystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Umgebungsbasis (von $\mathfrak{T}$)** :⇔

$$\forall\, U \in \mathfrak{T} \ \ \exists\, \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B} : \qquad U = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C\,. \tag{I.12}$$

(ii) Ein Teilsystem $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{T}(x)$ heißt **lokale Umgebungsbasis (bei $\boldsymbol{x}$)** :⇔

$$\forall\, U \in \mathfrak{T}(x) \ \ \exists\, V \in \mathfrak{L} : \qquad V \subseteq U. \tag{I.13}$$

(iii) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in M^{\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** :⇔

$$\exists\, x \in M \ \ \forall\, U \in \mathfrak{T}(x) \ \ \exists\, n_0 \in N \ \ \forall\, n \geq n_0 : \qquad x_n \in U. \tag{I.14}$$

In diesem Fall heißt x **Grenzwert oder Limes von $\boldsymbol{(x_n)_{n=1}^\infty}$**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist M eine Menge, so ist $\mathfrak{T}_{min} := \{\emptyset, M\}$ die kleinste Topologie auf M, und $\mathfrak{P}(M)$ ist die größte Topologie auf M,
- Für einen topologischen Raum $(M, \mathfrak{T})$ sind $\emptyset = M \setminus M$ und $M = M \setminus \emptyset$ abgeschlossen (und nach (I.1) auch offen).
- Der Abschluss $\overline{A}$ einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq M$ eines topologischen Raums $(M, \mathfrak{T})$ ist durch (I.10) wohldefiniert, da die Familie der abgeschlossenen Mengen $U \subset M$, die A enthalten, zumindest M selbst enthält.
- Die Offenheit von $\emptyset$ sichert das Entsprechende für das Innere A° einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq M$, definiert durch die Vereinigung (I.10).
- Der Abschluss $\overline{A}$ ist stets abgeschlossen. Sie ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A.
- Besitzt ein topologischer Raum $(M, \mathfrak{T})$ eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq M$ mit $\overline{\{x_n\}_{n=1}^\infty} = M$, so heißt $(M, \mathfrak{T})$ **separabel**.
- Das Innere ist A° stets offen. Es ist die größte offene Teilmenge von A.

Definition I.5. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge.

(i) Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt (I.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists\, U \in \mathfrak{T}(x): \quad U \subseteq A\,. \tag{I.15}$$

(ii) Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt (H.P.) von A**

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall\, U \in \mathfrak{T}(x): \quad U \cap A \neq \emptyset\,. \tag{I.16}$$

Lemma I.6. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann gelten folgende Aussagen

$$A \text{ ist offen} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Jeder Punkt in } A \text{ ist ein innerer Punkt von } A. \tag{I.17}$$

$$A \text{ ist abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Jeder Häufungspunkt von } A \text{ ist in } A \text{ enthalten.} \tag{I.18}$$

Beweis. Für $A = \emptyset$ und $A = M$ sind (I.17) und (I.18) trivial richtig, deshalb nehmen wir im Weiteren $A \neq \emptyset$ und $A^c = M \setminus A \neq \emptyset$ an.

(I.17), „$\Rightarrow$": Ist A offen und $x \in A$, so ist A selbst eine offene Umgebung von x, die in A enthalten ist, d.h. x ist ein innerer Punkt von A. Also ist jeder Punkt in A auch ein innerer Punkt.

(I.17), „$\Leftarrow$": Ist umgekehrt jeder Punkt in A ein innerer Punkt, so gibt es zu jedem $x \in A$ ein $U_x \in \mathfrak{T}(x) \subseteq A$, und $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ ist als Vereinigung der offenen Mengen U_x selbst offen.

(I.18), „$\Rightarrow$": Sei A abgeschlossen und A^c somit offen. Sei $x \in M$ ein Häufungspunkt von A. Wäre $x \in A^c$, so wäre $A^c \in \mathfrak{T}(x)$ mit $A \cap A^c = \emptyset$, was in Widerspruch zur Annahme stünde, dass x ein Häufungspunkt von A ist. Also muss $x \in A$ gelten, und A enthält alle seine Häufungspunkte.

(I.18), „$\Leftarrow$“: Enthalte umgekehrt A alle seine Häufungspunkte. Ist $x \in A^c$, so kann x also kein Häufungspunkt von A sein, d.h. es gibt ein $U \in \mathfrak{T}(x)$ mit $A \cap U = \emptyset$. Dann ist aber $U \subseteq A^c$, d.h. x ist ein innerer Punkt von A^c. Es folgt dass jeder Punkt von A^c ein innerer Punkt ist und dass A^c nach (I.17) somit offen und deshalb A abgeschlossen sind. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $(M, \mathfrak{T})$ hausdorffsch, so ist der Grenzwert $x \in M$ einer konvergenten Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eindeutig, und wir schreiben

$$x \ =: \ \lim_{n\to\infty} \big\{ x_n \big\}. \tag{I.19}$$

- Ist $(M, \mathfrak{T})$ **erstabzählbar**, d.h. besitzt jeder Punkt $x \in M$ eine abzählbare lokale Umgebungsbasis $\mathfrak{T}(x)$, so impliziert die Eindeutigkeit von Grenzwerten konvergenter Folgen umgekehrt auch, $(M, \mathfrak{T})$ hausdorffsch ist.
- Konvergenz von Folgen ist für allgemeine topologische Räume definiert, jedoch nicht der Begriff der Cauchy-Folge.
- Eine Topologie $\mathfrak{T}$ ist durch eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ bestimmt. Die offenen Mengen in M sind sämtlichst Vereinigungen von Mengen in $\mathfrak{B}$.
- Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{R}^d$. Dann ist ist die Familie $\mathfrak{B} \ = \ \{B(x,r) |\, x \in \mathbb{R}^d,\, r > 0\}$ der offenen Kugeln

$$B(r,x) \ := \ \big\{ y \in \mathbb{R}^d \ \big| \ \|y - x\|_{\text{eukl}} < r \,\big\} \tag{I.20}$$

eine Umgebungsbasis der **euklidschen Topologie $\mathfrak{T}_{\text{eukl}}$** $\subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, wobei $\|x\|_{\text{eukl}} := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_d)$ die euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

- Genauso ist beispielsweise für $x = 0 \in \mathbb{R}^d$

$$\mathfrak{L} \ = \ \big\{ \, B(0, 2^{-n}) \, \big| \, n \in \mathbb{N} \, \big\} \tag{I.21}$$

eine (abzählbare) lokale Umgebungsbasis bei 0.

- Sind $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist auch $(A, \mathfrak{T}_{\text{rel}})$ ein topologischer Raum, wobei man

$$\mathfrak{T}_{\text{rel}} \ = \ \big\{ A \cap U \ \big| \ U \in \mathfrak{T} \big\} \tag{I.22}$$

als **(durch $\mathfrak{T}$ induzierte) relative Topologie (auf A)** bezeichnet. Beachte, dass die Mengen $A \cap U \subseteq M$ in (I.22) im Allgemeinen (in M) nicht offen sind.

- Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $\mathfrak{T}_{\text{eukl}}(d)$ die euklidsche Topologie auf $\mathbb{R}^d$, so ist die durch $\mathfrak{T}_{\text{eukl}}(n)$ induzierte relative Topologie auf $\mathbb{R}^m$ gerade $\mathfrak{T}_{\text{eukl}}(m)$.

I.2. Erzeugte Topologien

Lemma I.7. Seien M eine Menge und $\{\mathfrak{T}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Topologien $\mathfrak{T}_i \subseteq \mathfrak{P}(M)$ auf M. Dann ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{T}_i$ eine Topologie auf M.

Beweis. Nachprüfen der Topologieaxiome (i)-(iii) in Definition I.1. $\square$

Definition I.8. Seien M eine Menge und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Familie von Teilmengen von M. Dann heißt

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{E}] \;:=\; \bigcap \big\{ \mathfrak{U} \,\big|\, \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(M), \;\; \mathfrak{U} \text{ ist eine Topologie} \big\} \tag{I.23}$$

die von $\mathfrak{E}$ erzeugte Topologie auf M.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die von $\mathfrak{E}$ erzeugte Topologie $\mathfrak{T}[\mathfrak{E}]$ auf M ist durch (I.23) wohldefiniert, da die Familie der Topologien auf M, die $\mathfrak{E}$ enthalten, zumindest $\mathfrak{P}(M)$ enthält.
- $\mathfrak{T}[\mathfrak{E}]$ ist die kleinste Topologie auf M, die $\mathfrak{E}$ enthält.
- Tatsächlich kann man zu gegebener Familie $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ die von ihr erzeugte Topologie und eine Umgebungsbasis explizit angeben; dies ist Inhalt von Satz I.9, dessen Beweis man bei den Ergänzungen im Abschnitt I.5 findet.

Satz I.9. Sei $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M. Bezeichnet

$$\mathfrak{B} \;:=\; \big\{ E_1 \,\cap\, E_2 \,\cap\, \ldots \,\cap\, E_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}, \; E_i \in \mathfrak{E} \big\} \tag{I.24}$$

die Familie aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{E}$, so ist

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{E}] \;=\; \{\emptyset, M\} \;\cup\; \Big\{ \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \,\Big|\, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Big\}, \tag{I.25}$$

und $\{\emptyset, M\} \cup \mathfrak{B}$ ist eine Umgebungsbasis von $\mathfrak{T}[\mathfrak{E}]$.

Definition I.10. Seien $(M, \mathfrak{U})$ und $(N, \mathfrak{V})$ zwei topologische Räume und

$$\mathfrak{Q} \;:=\; \big\{ U \times V \,\big|\, U \in \mathfrak{U}, \;\; V \in \mathfrak{V} \big\} \;\subseteq\; \mathfrak{P}(M \times N)\,. \tag{I.26}$$

Dann heißt die von $\mathfrak{Q}$ erzeugte Topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{Q})$ **Produkttopologie $\boldsymbol{\mathfrak{T}_{M\times N}}$ auf $\boldsymbol{M \times N}$.**

Bemerkungen und Beispiele.

- Im Folgenden beziehen wir uns für $M \times N$ stets auf die Produkttopologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{Q})$, wenn nichts anderes vereinbart wurde.
- Die in (I.27) definierte Familie $\mathfrak{Q}$ besteht selbst aus offenen Mengen und ist eine Umgebungsbasis der Produkttopologie auf $M \times N$.
- Offensichtlich kann Definition I.10 leicht induktiv auf das kartesische Produkt endlich vieler topologischer Räume verallgemeinert werden:
  Sind $N \in \mathbb{N}$, $(M_1, \mathfrak{T}_1), (M_2, \mathfrak{T}_2), \ldots (M_N, \mathfrak{T}_N)$ topologische Räume und
  $$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1^N \;&:=\; \big\{ U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \,\big|\, U_1 \in \mathfrak{T}_1, \; U_2 \in \mathfrak{T}_2, \; \ldots, \; U_N \in \mathfrak{T}_N \big\} \\ &\subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \times \cdots \times \mathfrak{T}_N)\,, \end{aligned} \tag{I.27}$$
  so heißt die von $\mathfrak{Q}_1^N$ erzeugte Topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}_1^N)$ **Produkttopologie $\boldsymbol{\mathfrak{T}_{M_1\times\cdots\times M_N}}$ auf $\boldsymbol{M_1 \times \cdots \times M_N}$.**

- Für unendliche kartesische Produkte topologischer Räume kann man auch eine Topologie definieren; hier gibt es jedoch mehrere Konstruktionsmöglichkeiten. Wir kommen darauf in Abschnitt I.3 zurück.

I.3. Stetige Abbildungen

Definition I.11. Seien $(M, \mathfrak{S})$ und $(N, \mathfrak{T})$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **stetig**

:⇔ Urbilder offener Mengen unter f sind offen, d.h.

$$\forall\, A \in \mathfrak{T} : \qquad f^{-1}(A) \;\in\; \mathfrak{S}. \tag{I.28}$$

Sind f bijektiv und $f : M \to N$ und $f^{-1} : N \to M$ stetig, so nennt man f einen **Homöomorphismus**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $(N, \mathfrak{S})$ ein topologischer Raum, M eine Menge und $f : M \to N$ eine Abbildung. Da Urbilder mengentheoretische Operationen erhalten, ist auch

$$f^{-1}(\mathfrak{S}) \;=\; \big\{ f^{-1}(A) \;\big|\; A \in \mathfrak{S} \big\} \;\subseteq\; \mathfrak{P}(M) \tag{I.29}$$

  eine Topologie (auf M).

- Offensichtlich ist $\mathfrak{T}[f^{-1}(\mathfrak{S})] = f^{-1}(\mathfrak{S})$, d.h. sie ist die kleinste Topologie $\widetilde{\mathfrak{T}}$ auf M, sodass $f : (M, \widetilde{\mathfrak{T}}) \to (N, \mathfrak{S})$ stetig ist.

- Sind $N \in \mathbb{N}$ und $(M_1, \mathfrak{T}_1), (M_2, \mathfrak{T}_2), \ldots (M_N, \mathfrak{T}_N)$ topologische Räume, so definieren wir für $\nu \in \mathbb{Z}_1^N$ die kanonische Projektion $\pi_\nu : M_1 \times \cdots \times M_N \to M_\nu$ durch

$$\pi_\nu\big[(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_N)\big] \;:=\; x_\nu\,, \tag{I.30}$$

  d.h. π_ν liest aus $x = (x_1, \ldots, x_N)$ die ν. Koordinate aus. Für $U_1 \in \mathfrak{T}_1, U_2 \in \mathfrak{T}_2, \ldots, U_N \in \mathfrak{T}_N$ sind offenbar

$$\pi_\nu^{-1}[U_\nu] \;=\; M_1 \times \cdots \times M_{\nu-1} \times U_\nu \times M_{\nu-1} \times \cdots \times M_N \tag{I.31}$$

  und somit

$$\pi_1^{-1}[U_1] \cap \pi_2^{-1}[U_2] \cap \cdots \cap \pi_N^{-1}[U_N] \;=\; U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N\,. \tag{I.32}$$

  Damit sind die Quader aus (I.27) genau die Schnitte der Urbilder von U_ν unter π_ν, d.h.

$$\mathfrak{Q}_1^N \;=\; \big\{\, \pi_1^{-1}[U_1] \cap \cdots \cap \pi_N^{-1}[U_N] \;\big|\; U_1 \in \mathfrak{T}_1,\, \ldots,\, U_N \in \mathfrak{T}_N \big\}\,. \tag{I.33}$$

  Somit ist die Produkttopologie $\mathfrak{T}\big[\mathfrak{Q}_1^N\big]$ genau die kleinste Topologie auf $M_1 \times \cdots \times M_N$, für die alle kanonischen Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_N$ stetig sind.

- Dies lässt sich auf (abzählbar oder auch überabzahlbar) unendlich viele Faktoren im kartesischen Produkt wie folgt verallgemeinern:
  Seien $\mathcal{I} \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\{(M_\nu, \mathfrak{T}_\nu)\}_{\nu\in\mathcal{I}}$ eine Familie topologischer Räume. Wir definieren ihr **kartesische Produkt** durch

$$\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu \;:=\; \Big\{ x : \mathcal{I} \to \bigcup_{\nu\in\mathcal{I}} M_\nu \;\Big|\; \forall\, \nu \in \mathcal{I} :\; x_\nu \in M_\nu \Big\} \tag{I.34}$$

  und für $\nu \in \mathcal{I}$ die kanonische Projektion $\pi_\nu : \prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu \to M_\nu$ durch

$$\pi_\nu\big[(x_\mu)_{\mu\in\mathcal{I}}\big] \;:=\; x_\nu\,. \tag{I.35}$$

  Dann ist die **Produkttopologie $\mathfrak{T}_{\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu}$ auf $\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu$** definiert als die kleinste (gröbste) Topologie auf $\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu$, für die alle kanonischen Projektionen $\pi_\nu : \prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu \to M_\nu$ stetig sind.
- Für die Produkttopologie $\mathfrak{T}_{\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu}$ gilt der wichtige *Satz von Tychonoff*: Ist $\{(M_\nu, \mathfrak{T}_\nu)\}_{\nu\in\mathcal{I}}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, so ist auch $\big(\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu, \mathfrak{T}_{\prod_{\mu\in\mathcal{I}} M_\mu}\big)$ kompakt.

I.4. Parakompakte und zusammenhängende topologische Räume

Definition I.12. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Überdeckung $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ von M heißt **lokal endlich**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M \;\exists\, W \in \mathfrak{T}(x) : \quad \Big| \big\{ U \in \mathfrak{S} \;\big|\; U \cap W \neq \emptyset \big\} \Big| \;<\; \infty. \tag{I.36}$$

(ii) $(M, \mathfrak{T})$ heißt **parakompakt**
$:\Leftrightarrow$ Zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T}$ von M gibt es eine lokal endliche Überdeckung $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{T}$ von M so, dass

$$\forall\, U \in \mathfrak{U} \;\; \exists\, V \in \mathfrak{V} : \quad V \subseteq U\,. \tag{I.37}$$

Wir werden Parakompaktheit später bei der Definition von Mannigfaltigkeiten stets voraussetzen. Der folgende Satz, dessen Beweis man in den Ergänzungen I.5 findet, sichert, dass beispielsweise metrische Räume stets parakompakt sind. Damit ist die Parakompaktheit eine relativ schwäche Voraussetzung, die wir guten Gewissens zukünftig machen werden.

Satz I.13. Ist (M, ρ) ein metrischer Raum, so ist $(M, \mathfrak{T}_\rho)$ parakompakt und hausdorffsch.

Ein weiterer, wichtiger topologischer Begriff ist der eines zusammenhängenden topologischen Raums, den wir jetzt einführen.

Definition I.14. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum

(i) M heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{T},\, A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = M : \quad (A = M \,\wedge\, B = \emptyset) \,\vee\, (A = \emptyset \,\wedge\, B = M)\,. \tag{I.38}$$

(ii) M heißt **wegzusammenhängend** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x, y \in M\ \exists\, \gamma \in C\big([0,1]; M\big) : \quad \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\,. \tag{I.39}$$

Lemma I.15. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum.

$$M \text{ ist wegzusammenhängend } \Rightarrow\ M \text{ ist zusammenhängend.} \tag{I.40}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Umkehrung von Lemma I.15 ist i.A. nicht richtig. So ist $M = M_1 \cup M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$M_1 \;=\; \Big\{\big(x, \sin(1/x)\big)\ \Big|\ x > 0\Big\} \quad \text{und} \quad M_2 \;=\; \{0\} \times [-1, 1] \tag{I.41}$$

  zwar zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend.
- Für Mannigfaltigkeiten sind die Eigenschaften, zusammenhängend oder wegzusammenhängend zu sein jedoch gleichwertig, wie wir im nächsten Kapitel zeigen.

I.5. Ergänzungen

I.5.1. Explizite Charakterisierung eines topologischen Raums - Beweis von Satz I.9:

Wir definieren $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{P}(X)$ durch die rechte Seite in (I.25),

$$\mathfrak{T}' \ := \ \{\emptyset, M\} \ \cup \ \Big\{ \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \,\Big|\, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Big\}. \tag{I.42}$$

Offensichtlich sind $\emptyset, M \in \mathfrak{T}'$.

Seien $A = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G, B = \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H \in \mathfrak{T}'$, mit $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{B}$. Mit $G, H \in \mathfrak{B}$ ist auch $G \cap H \in \mathfrak{B}$. Dann ist also

$$\mathfrak{F} \ := \ \Big\{ G \cap H \,\Big|\, G \in \mathfrak{G}, \ H \in \mathfrak{H} \Big\} \ \subseteq \ \mathfrak{B}, \tag{I.43}$$

und es gilt

$$A \cap B \ = \ \Big(\bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G \Big) \cap \Big(\bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H \Big) \ = \ \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} G \cap H \ = \ \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F \ \in \ \mathfrak{T}'. \tag{I.44}$$

Sei nun $\mathcal{J} \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $A_j = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}_j} G \in \mathfrak{T}'$ mit $\mathfrak{G}_j \subseteq \mathfrak{B}$, für alle $j \in \mathcal{J}$. Dann ist auch $\widetilde{\mathfrak{G}} := \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathfrak{G}_j \subseteq \mathfrak{B}$, und es gilt

$$\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j \ = \ \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \bigcup_{G \in \mathfrak{G}_j} G \ = \ \bigcup_{G \in \widetilde{\mathfrak{G}}} G \ \in \ \mathfrak{T}'. \tag{I.45}$$

Also ist $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{E}$ eine Topologie auf M.

Sei nun $\mathfrak{T}'' \supseteq \mathfrak{E}$ (irgend)eine Topologie auf M, die $\mathfrak{E}$ umfasst. Da $\mathfrak{T}''$ unter Bildung von Durchschnitten endlich vieler Mengen abgeschlossen ist, gilt auch $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}''$. Da $\mathfrak{T}''$ weiterhin auch unter Vereinigungen beliebiger Teilsysteme seiner selbst abgeschlossen ist, ist dann auch

$$\mathfrak{T}' \ \subseteq \ \mathfrak{T}''. \tag{I.46}$$

Daher ist $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{E}$ die kleinste Topologie, die $\mathfrak{E}$ umfasst.

Offensichtlich ist $\{\emptyset, M\} \cup \mathfrak{B}$ auch eine Umgebungsbasis.

I.5.2. Metrische Räume sind parakompakt - Beweis von Satz I.13:

Sei $\{U_s\}_{s \in \mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{T}$ eine Überdeckung von M. Aus dem Auswahlaxiom bzw. dem Zornschen Lemma folgt, dass wir $\mathfrak{S}$ als total geordnet annehmen können. Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathfrak{S}$ definieren wir induktiv

$$V_{s,n} \ := \ \bigcup_{x \in A_{s,n}} B(x, \, 2^{-n}), \tag{I.47}$$

$$A_{s,n} \ := \ \Big\{ x \in U_s \ \Big| \ B(x, \, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_s, \ \forall t < s, \ \forall k < n : \ x \notin U_t, \ x \notin V_{t,k} \Big\}. \tag{I.48}$$

Offenbar ist $V_{s,n}$ offen und $V_{s,n} \subseteq U_s$. Seien nun $x \in M$ und $s \in \mathfrak{S}$ so, dass $x \in U_s$ und $x \notin U_t$ für alle $t < s$ gilt. Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ist dann auch $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_s$, da U_s offen ist. Ist $x \notin A_{s,n}$, so gibt es $t < s$ und $k < n$, so dass $x \in V_{t,k}$. Ist hingegen $x \in A_{s,n}$, so gilt trivialerweise $x \in V_{s,n}$. In jedem Fall gilt also

$$M \;=\; \bigcup_{s\in\mathfrak{S}, n\in\mathbb{N}} V_{s,n}. \tag{I.49}$$

D.h. $\{V_{s,n}\}_{s\in\mathfrak{S},n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von M mit $V_{s,n} \subseteq U_s$, und es verbleibt zu zeigen, dass $\{V_{s,n}\}_{s\in\mathfrak{S},n\in\mathbb{N}}$ lokal endlich ist.

Zu festem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun $x \in V_{t,n}$ und $y \in V_{s,n}$ mit $t < s$. Dann gibt es $\tilde{x} \in A_{t,n}$ und $\tilde{y} \in A_{s,n}$ so, dass

$$x \;\in\; B(\tilde{x},\, 2^{-n}) \;\subseteq\; B(\tilde{x},\, 3 \cdot 2^{-n}), \tag{I.50}$$

$$y \in B(\tilde{y}, 2^{-n}), \quad \tilde{y} \in U_s \setminus U_t. \tag{I.51}$$

Wegen $B(\tilde{x},\, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_t$ ist $\tilde{y} \notin B(\tilde{x},\, 3 \cdot 2^{-n})$. Also ist $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 3 \cdot 2^{-n}$ und damit

$$\rho(x, y) \;\geq\; \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) - \rho(x, \tilde{x}) - \rho(y, \tilde{y}) \;\geq\; 2^{-n}. \tag{I.52}$$

Somit ist

$$\forall\, t < s,\ n \in \mathbb{N}: \quad \mathrm{dist}(V_{t,n}\,;\, V_{s,n}) \;:=\; \inf\big\{\rho(x,y) \;\big|\; x \in V_{t,n};\ y \in V_{s,n}\big\} \;\geq\; 2^{-n}, \tag{I.53}$$

wobei wir $\mathrm{dist}(A, \emptyset) := \infty$ setzen. Durch Vertauschen der Rollen von t und s erhalten wir damit

$$\forall\, s, t \in \mathfrak{S},\ t \neq s,\ n \in \mathbb{N}: \qquad \mathrm{dist}(V_{t,n}\,;\, V_{s,n}) \;\geq\; 2^{-n}. \tag{I.54}$$

Seien nun $x \in M$ und $t \in \mathfrak{S}$ sowie $j \in \mathbb{N}$ so, dass $x \in V_{t,j}$. Da $V_{t,j}$ offen ist, gilt auch

$$W \;:=\; B(x,\, 2^{-k}) \;\subseteq\; B(x,\, 2^{-k+2}) \;\subseteq\; V_{t,j}, \tag{I.55}$$

für $k \in \mathbb{N}$ genügend groß. Nach (I.54) ist $W \cap V_{s,n} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $s \neq t$, d.h.

$$\mathfrak{U} \;:=\; \big\{V_{s,n} \;\big|\; s \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N},\ W \cap V_{s,n} \neq \emptyset\big\} \;\subseteq\; \big\{V_{t,n}\big\}_{n=1}^{\infty}. \tag{I.56}$$

Sind nun $n \geq k + j$ und $y \in A_{t,n}$, so ist $y \notin V_{t,j}$, da $j < n$. Damit ist jedoch $y \notin B(x,\, 2^{-k+2})$, d.h. $\rho(x, y) \geq 2^{-k+2} - 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-k}$. Also ist

$$W \cap V_{t,n} \;=\; \bigcup_{y \in A_{s,n}} \big[W \cap B(y, 2^{-n})\big] \;\subseteq\; \bigcup_{y \in A_{s,n}} \big[W \cap B(y, 2^{-k})\big] \;=\; \emptyset, \tag{I.57}$$

und wir erhalten, dass

$$|\mathfrak{U}| \;\leq\; \Big|\{V_{t,n}\}_{n=1}^{k+j-1}\Big| \;=\; k + j - 1 \;<\; \infty. \tag{I.58}$$

II. Mannigfaltigkeiten

Wir kommen nun zur Theorie der Mannigfaltigkeiten. Im Weiteren nehmen wir von allen topologischen Räumen stets an, dass sie hausdorffsch, separabel und parakompakt sind.

II.1. Karten und Atlanten

Definition II.1. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein (hausdorffscher, separabler und parakompakter) topologischer Raum.

(i) Sind $U \in \mathfrak{T}$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus, so bezeichnen wir $C = (U, \varphi)$ als **Karte (von M)**.

(ii) Zwei Karten $C_1 = (U_1, \varphi_1)$, $C_2 = (U_2, \varphi_2)$ von M heißen **verträglich**

$$:\Leftrightarrow \quad \text{Falls } U_{12} := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \text{ so gelten:}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in \mathbb{C}^\infty\big(\varphi_2(U_{12})\,;\, \varphi_1(U_{12})\big), \tag{II.1}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathbb{C}^\infty\big(\varphi_1(U_{12})\,;\, \varphi_2(U_{12})\big), \tag{II.2}$$

$$\forall\, \xi \in \varphi_2(U_{12}) : \quad \det\big(J[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}](\xi)\big) \neq 0. \tag{II.3}$$

Lemma II.2. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $C_1 = (U_1, \varphi_1)$, $C_2 = (U_2, \varphi_2)$ zwei Karten von M mit $U_{12} := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $\varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $\varphi_2(U_2) \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ jeweils offen. Erfüllen φ_1 und φ_2 die Bedingungen (II.1) und (II.2), so ist

$$m_1 = m_2. \tag{II.4}$$

Beweis. Seien $\xi_0 \in \varphi_2(U_{12})$ ein Koordinatenpunkt, $J := J[\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}](\xi_0)$ die Jacobimatrix von $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ bei ξ_0, $\{e_1, \ldots, e_{m_2}\} \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ die Standardbasis, $\delta > 0$ und

$$y_i(\delta) := \frac{1}{\delta}\Big\{\big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\big)(\xi_0 + \delta e_i) - \big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\big)(\xi_0)\Big\}, \tag{II.5}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m_2$. Dann ist $\lim_{\delta \to 0} r_i(\delta) = 0$ mit

$$r_i(\delta) := y_i(\delta) - J e_i. \tag{II.6}$$

Sind nun $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m_2} \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$\sum_{i=1}^{m_2} \alpha^i \, y_i(\delta) \;=\; 0, \tag{II.7}$$

so gilt mit $\xi := \sum_{i=1}^{m_2} \alpha^i \, e_i$ auch

$$J\xi \;=\; -\sum_{i=1}^{m_2} \alpha^i \, r_i(\delta), \tag{II.8}$$

d.h.

$$\xi \;=\; -\sum_{i=1}^{m_2} \alpha^i \, J^{-1} r_i(\delta). \tag{II.9}$$

Insbesondere ist

$$\max_i \big(|\alpha^i|\big) \;\leq\; \max_i \big(|\alpha^i|\big) \cdot \big\|J^{-1}\big\| \cdot \bigg(\sum_{j=1}^{m_2} \|r_j(\delta)\| \bigg) \;<\; \max_i \big(|\alpha^i|\big), \tag{II.10}$$

falls $\delta > 0$ genügend klein ist. Also gilt

$$\alpha^1 \;=\; \alpha^2 \;=\; \cdots \;=\; \alpha^{m_2} \;=\; 0 \tag{II.11}$$

und

$$\big\{ y_1(\delta), \ldots, y_{m_2}(\delta) \big\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^{m_1} \tag{II.12}$$

ist linear unabhängig. Somit gilt $m_1 \geq m_2$. Genauso folgt umgekehrt $m_2 \geq m_1$. $\square$

Die Bedingung der Glattheit -oder wenigstens stetigen Differenzierbarkeit- der Abbildungen $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ erleichtert den Beweis der Gleichheit von m_1 und m_2 enorm; tatsächlich gilt $m_1 = m_2$ auch, wenn nur die Stetigkeit von $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ vorausgesetzt wird, wie Brouwer 1910 gezeigt hat.

Satz II.3 (Brouwer)**.** Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ offen und $f : U_1 \to U_2$ ein Homöomorphismus. Dann ist $m_1 = m_2$.

Die Subtilität dieser Aussage wird deutlich, wenn man den folgenden Satz von Peano von 1890 liest, der zeigt, dass die Bijektivität von $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ (und somit auch $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$) unverzichtbar ist.

Satz II.4 (Peano)**.** Es gibt eine stetige Abbildung $f \in C([0,1]\,;\,[0,1] \times [0,1])$, die surjektiv ist,

$$f([0,1]) \;=\; [0,1] \times [0,1]. \tag{II.13}$$

Beweis. Wir definieren $f_n : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch folgendes Bild:

[BILD]

Offenbar gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1]$, dass

$$\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \;\leq\; \frac{\sqrt{2}}{3^n}, \tag{II.14}$$

$$\forall m \geq n,\ 0 \leq k \leq 3^{n+1}: \quad f_m\left(\frac{k}{3^{n+1}}\right) \;=\; f_n\left(\frac{k}{3^{n+1}}\right). \tag{II.15}$$

Insbesondere ist für $N < n < m$

$$\sup_{t\in[0,1]} \|f_m(t) - f_n(t)\| \;\leq\; \sqrt{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} 3^{-k} \;=\; \frac{3^{-(N+1)}}{\sqrt{2}(1-\frac{1}{3})} \;=\; \frac{3^{-N}}{2\sqrt{2}} \;\to\; 0, \tag{II.16}$$

für $N \to \infty$, d.h. $(f_n)_{n=0}^{\infty} \in \big(C([1,0]\,;\,[1,0] \times [1,0])\big)^{\mathbb{N}_0}$ ist gleichmäßig konvergent und konvergiert deshalb gegen eine stetige Grenzfunktion

$$f \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n \;\in\; C\big([1,0]\,;\,[1,0] \times [1,0]\big). \tag{II.17}$$

Offenbar ist $f([0,1]) \subseteq [0,1] \times [0,1]$ dicht, d.h.

$$\overline{f([0,1])} \;=\; [0,1] \times [0,1], \tag{II.18}$$

und als Bild der kompakten Menge $[0,1]$ unter der stetigen Abbildung f ist $f([0,1])$ auch selbst kompakt und insbesondere abgeschlossen, d.h.

$$f([0,1]) \;=\; \overline{f([0,1])} \;=\; [0,1] \times [0,1]. \tag{II.19}$$

□

Definition II.5. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Familie $\mathcal{A} = \{C_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ von Karten von M heißt **Atlas von M** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{I}: \quad C_\alpha \text{ und } C_\beta \text{ sind verträglich;} \tag{II.20}$$

$$M \;\subseteq\; \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha\,; \tag{II.21}$$

$$\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, \alpha \in \mathcal{I}: \quad \varphi_\alpha(U_\alpha) \;\subseteq\; \mathbb{R}^m \text{ ist offen.} \tag{II.22}$$

(ii) Zwei Atlanten $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ von M heißen **verträglich**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall C \in \mathcal{A},\ C' \in \mathcal{A}': \quad C \text{ und } C' \text{ sind verträglich.} \tag{II.23}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Trotz der Gleichheit der Dimensionen $m_1 = m_2$ von sich überlappenden Karten gemäß Lemma II.2 müssen wir eine einheitliche Dimension m alle Karten gesondert in Definition II.5 fordern, da M nicht zusammenhängend sein muss und es möglicherweise eine Zerlegung $M = U_1 \cup U_2$ in zwei disjunkte offene Teilmengen $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ mit Dimension m_1 auf U_1 und Dimension $m_2 \neq m_1$ auf U_2 gibt.

II.2. Mannigfaltigkeiten als Äquivalenzklassen verträglicher Atlanten

Lemma II.6. Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Dann definiert die Verträglichkeit von Atlanten von M eine Äquivalenzrelation "$\sim$" auf dem System aller Atlanten von M.

Beweis. Reflexivität $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}$ und Symmetrie $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_1$ sind trivial, nur bei der Transitivität $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_3$ gibt es etwas zu beweisen. Seien dazu $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ drei Atlanten von M, gelte $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3$ und seien $C_1 = (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$ und $C_3 = (U_3, \varphi_3) \in \mathcal{A}_3$ mit $U_{13} := U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$.

Ist nun $p \in U_{13}$, so gibt es eine Karte $C_2 = (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2$, für die $U_2 \ni p$ gilt. Also ist $p \in U_{123} := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ gilt, da $\mathcal{A}_2$ ein Atlas von M ist. Daher gibt es eine offene Umgebung $V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ von $\xi_1 := \varphi_1(p)$, sodass auf V_1

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} \; = \; \big(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}\big) \circ \big(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\big) \tag{II.24}$$

gilt. Als Komposition der glatten Abbildungen $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ und $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ ist $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ selbst glatt auf $V_1 \ni \xi_1$. Weiterhin ist mit $\xi_2 := \varphi_2(p)$ nach der Kettenregel

$$\det\big(J[\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}](\xi_1)\big) \; = \; \det\big(J[\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}](\xi_2)\big) \cdot \det\big(J[\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}](\xi_1)\big) \; \neq \; 0. \tag{II.25}$$

Genauso folgt die Glattheit von $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ auf einer offenen Umgebung V_3 von $\xi_3 := \varphi_3(p)$ und $\det J[\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}](\xi_3) \neq 0$.

Da $p \in U_{13}$ beliebig war, impliziert dies die Verträglichkeit von C_1 und C_3, also die Transitivität von "$\sim$". □

Für die nun folgende Definition einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit wollen wir noch einige zusätzliche Eigenschaften das topologischen Raums $(M, \mathfrak{T})$ fordern, um Pathologien auszuschließen, die uns in die Irre führen würden.

Definition II.7. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{A}$ ein Atlas von M und $m \in \mathbb{N}$ die Dimension der Bildbereiche der Karten in $\mathcal{A}$.

(i) Die zu $\mathcal{A}$ gehörige Äquivalenzklasse bezüglich verträglicher Atlanten bezeichnen wir als **(differenzierbare) Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})}$**.

(ii) Die Zahl $m \in \mathbb{N}$ nennen wir **Dimension** der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Im Folgenden betrachten wir auf M immer die durch die euklidsche Topologie auf $\mathbb{R}^d$ induzierte relative Topologie $\mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}$ auf $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Zu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Familie $\{M \cap B(q, 2^{-n})\}_{q \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis, deshalb ist $(M, \mathfrak{T}_\rho)$ als topologischer Raum separabel.
- Beispielsweise ist zwar $S^1 := \{q \in \mathbb{R}^2 : \|q\| = 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ nicht offen, in der relativen Topologie ist $(S^1, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}})$ aber offen (und abgeschlossen und auch kompakt).

- Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ein nichtleere offene Teilmenge (etwa auch $M = \mathbb{R}^d$). Dann ist $C = (M, id)$ eine Karte von M, $\mathcal{A} = \{C\}$ ein Atlas und $(M, \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit.
- $\mathbb{S}^1 = (S^1, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}, \mathcal{A})$ mit $S^1 = \{q \in \mathbb{R}^2 : \ |q| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei $\mathcal{A} = \{C_+, C_-\}$ mit $C_\pm = (U_\pm, \varphi_\pm)$, $U_\pm := S^1 \setminus \{(0, \pm 1)\}$, $\varphi_\pm(U_\pm) = \mathbb{R}$ und
$$\forall\, q = (q^1, q^2) \in U_+ : \qquad \varphi_+(q) \ := \ \frac{2q^1}{1 - q^2}, \tag{II.26}$$
$$\forall\, q = (q^1, q^2) \in U_- : \qquad \varphi_-(q) \ := \ \frac{2q^1}{1 + q^2}. \tag{II.27}$$
Die Karten $C_\pm$ bezeichnet man als **stereografische Projektionen**.

Satz II.8. Seien $n, d \in \mathbb{N}$ mit $n \leq d-1$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nichtleer und $F = (F^1, \ldots, F^{d-n}) \in C^\infty(A; \mathbb{R}^{d-n})$ so, dass
$$\forall\, q \in N : \qquad \mathrm{rk}\Big[\Big(\frac{\partial F^i(q)}{\partial q^j} \Big)_{\substack{i=1,\ldots,d \\ j=1,\ldots,d-n}} \Big] \ = \ d - n, \tag{II.28}$$
d.h. die Jacobimatrix $J[F](q)$ von F habe an jedem Punkt $q \in N$ den maximalen Rang $d - n$, wobei
$$N \ := \ \{ q \in A \mid F(q) = 0 \ \}. \tag{II.29}$$
Dann definiert $(N, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Beweis. Seien $q \in N$ und $J = \big(\frac{\partial F^i(q)}{\partial x^j}\big)_{i,j}$ die Jacobimatrix von F bei q. Nach geeigneter Umordnung der Variablen ist $J = (A \,|\, B)$, wobei $A \in \mathfrak{M}_{(d-n)\times(d-n)}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$ und $B \in \mathfrak{M}_{(d-n)\times(n)}(\mathbb{R})$, gemäß (II.28). Nach dem Satz über implizite Funktionen besitzt die Gleichung $F(\hat{q}) = 0$ in einer Umgebung von q eine lokale Auflösung nach $\hat{q}^1, \ldots, \hat{q}^{d-n}$. Genauer gibt es zwei offen Mengen $U_q \subseteq \mathbb{R}^d$, $W_q \subseteq \mathbb{R}^n$ und $h = (h^1, \ldots, h^{d-n}) \in C^\infty(W; \mathbb{R}^{d-n})$ so, dass $q \in V_q := \big(\mathbb{R}^{d-n} \times W_q\big) \cap U_q$ und dass
$$\forall\, \hat{q} = (y, \xi) \in V_q : \qquad F(y, \xi) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ y \ = \ h(\xi). \tag{II.30}$$
Somit definiert $\big(V_q,\ \hat{q} = (y, \xi) \mapsto \xi\big)$ eine Karte von N, die q enthält, und $\big\{\big(V_q,\ (y, z) \mapsto z\big)\big\}_{q \in N}$ ist ein Atlas von N. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x|_{eukl} = 1 \ \}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A} := \{A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \ \det(A) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$. Dann definiert $(\mathcal{A}, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$. Um dies zu sehen, beobachten wir, dass für $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$,
$$\det(A) \ = \ \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} (-1)^\pi a_{\pi(1),1} \ldots a_{\pi(n),n} \tag{II.31}$$

und deshalb

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{i,j}} = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{S}_n, \\ \pi(j)=i}} (-1)^\pi \, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(j-1),j-1} \cdot a_{\pi(j+1),j+1} \cdots a_{\pi(N),N} \tag{II.32}$$

ist. Mit anderen Worten ist die Jacobimatrix $J[\det](A)$ der Determinante gleich der Matrix A_{minor} der Minoren von A. Somit ist dann

$$\det\Big(J[\det](A)\Big) = \det[A_{\text{minor}}] = 1, \tag{II.33}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, denn $A \cdot A_{\text{minor}}^T = \det(A) \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Insbesondere gibt es ein $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ so, dass

$$\big(J[\det](A)\big)_{i,j} = \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{i,j}} \neq 0\,, \tag{II.34}$$

und $\mathrm{rk}\big[J[\det](A)\big] = 1$.

- Sind $(M_1, \mathfrak{T}_1, \mathcal{A}_1)$ und $(M_2, \mathfrak{T}_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m_1 bzw. m_2, so ist auch $(M_1 \times M_2, \mathfrak{T}_{M1 \times M_2}, \mathcal{A}_{12})$ eine Mannigfaltigkeit bzgl. der Produkttopologie $\mathfrak{T}_{M1 \times M_2}$, wobei

$$\mathcal{A}_{12} := \Big\{ \big(U_1 \times U_2, (\varphi_1, \varphi_2)\big) \Big| \; (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1, \; (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2 \Big\} \tag{II.35}$$

und die Dimension von $(M_1 \times M_2, \mathfrak{T}_{M1 \times M_2}, \mathcal{A}_{12})$ gleich $m_1 + m_2$ ist.

- Sind $m, n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$, so definiert der Graph

$$\mathcal{G}_F := \Big\{ [\xi, F(\xi)] \in \mathbb{R}^{m+n} \; \Big| \; \xi \in U \Big\} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \tag{II.36}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, denn $\mathcal{A} = \big\{ \big(\mathcal{G}_F, \; [\xi, F(\xi)] \mapsto \xi\big) \big\}$ ist ein Atlas von $\mathcal{G}_F$.

II.3. Zusammenhang und Wegzusammenhang von Mannigfaltigkeiten

Als Nächstes beschreiben wir die allgemeine Gestalt von Mannigfaltigkeiten.

Lemma II.9. Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit.

$$(M, \mathfrak{T}) \text{ ist wegzusammenhängend} \Leftrightarrow (M, \mathfrak{T}) \text{ ist zusammenhängend.} \tag{II.37}$$

Beweis. Wir berufen auf Lemma I.15 und zeigen nur

$$(M, \mathfrak{T}) \text{ ist zusammenhängend} \Rightarrow (M, \mathfrak{T}) \text{ ist wegzusammenhängend.} \tag{II.38}$$

Seien dazu $q_0 \in M$ und

$$W \;:=\; \Big\{ q \in M \;\big|\; \exists\, \gamma \in C\big([0,1];M\big):\; \gamma(0) = q_0,\; \gamma(1) = q \Big\}. \tag{II.39}$$

Es ist zu zeigen, dass $W = M$ gilt. Dazu beweisen wir zuerst, dass W abgeschlossen ist. Sei also $p \in M$ ein Häufungspunkt von W und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte mit $U \ni p$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B(\varphi(p), \varepsilon) \subseteq \varphi(U)$. Wir setzen $V := \varphi^{-1}\big[B(\varphi(p), \varepsilon)\big] \subseteq U$. Dann ist $V \in \mathfrak{T}(p)$ und wegzusammenhängend, denn zu $p', p'' \in V$ definiert

$$\gamma(t) \;:=\; \varphi^{-1}\big[t\, \varphi(p') + (1-t)\, \varphi(p'')\big] \tag{II.40}$$

einen stetigen Weg in V von p' nach p. Da V eine offene Umgebung des Häufungspunkts p ist, gilt $W \cap V \neq \emptyset$, und es gibt ein $p' \in W \cap V$, d.h. es gibt einen stetigen Weg von q_0 nach p' und auch von p' nach p. Somit ist $p \in W$, d.h. W enthält alle ihre Häufungspunkte, und nach Lemma I.6 sind W abgeschlossen und $W^c = M \setminus W$ offen.

Seien andererseits $p \in W$ und $D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $V \ni p$. Dann gibt es abermals eine offene Umgebung $R \subseteq V$, $R \in \mathfrak{T}(p)$, die wegzusammenhängend ist. Mit $p \in W$ ist also auch $R \subseteq W$ und W ist somit offen.

Zusammenfassend erhalten wir:

$$M \;=\; W \cup W^c, \quad W, W^c \in \mathfrak{T}, \quad W \neq \emptyset. \tag{II.41}$$

weil M zusammenhängend ist, impliziert dies $W^c = \emptyset$ und dann auch $W = M$, wie behauptet. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir brauchen bei Mannigfaltigkeiten also zwischen zusammenhängend und wegzusammenhängend nicht unterscheiden.
- Sei $(M, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Für $q, p \in M$ wird durch

  $$q \sim p \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, \gamma \in C\big([0,1];M\big):\; \gamma(0) = q,\; \gamma(1) = p \tag{II.42}$$

  offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf M definiert. Die Äquivalenzklassen bezeichnen wir als **(Weg-) Zusammenhangskomponenten**.
- Mit dieser Äquivalenzrelation erhalten wir folgenden Satz.

Satz II.10. Ist $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, so gibt es eine disjunkte Familie $\{(M_l, \mathfrak{T}_l, \mathcal{A}_l)\}_{l \in \mathcal{L}}$ wegzusammenhängender Mannigfaltigkeiten, so dass

$$M \;=\; \bigcup_{l \in \mathcal{L}} M_l. \tag{II.43}$$

II.4. Ausschöpfungen und Partition der Eins

Satz II.11. Ist $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine (weg-)zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so besitzt M eine **abzählbare kompakte Ausschöpfung**, d.h. es gibt eine Folge $(K_n)_{n=1}^{\infty} \in M^{\mathbb{N}}$ kompakter

Teilmengen von M, sodass

$$K_1 \subseteq \overset{\circ}{K}_2 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_n \subseteq K_{n+1} \subseteq \cdots \tag{II.44}$$

und

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{II.45}$$

Zur Vorbereitung der nächsten Definition erinnern wir an den Begriff des Trägers

$$\mathrm{supp}[f] := \big\{ p \in M \,\big|\, f(p) > 0 \big\} \tag{II.46}$$

einer nichtnegativen stetigen Funktion $f \in C(M; \mathbb{R}_0^+)$ auf einem topologischen Raum $(M, \mathfrak{T})$. Es ist also $\mathrm{supp}[f] = f^{-1}[\mathbb{R}^+] \in \mathfrak{T}$ als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}_0^+$ unter der stetigen Abbildung f selbst offen.

Definition II.12. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathfrak{T}$ eine offene Überdeckung von M. Eine Familie $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}} \subseteq C(M; [0,1])$ stetiger Abbildungen heißt **(zu $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ gehörige) Partition der Eins** :⇔

$$(i) \qquad \forall\, \alpha \in \mathcal{J} \;\; \exists\, i \in \mathcal{I}: \quad V_\alpha := \mathrm{supp}[\chi_\alpha] \subseteq U_i\,; \tag{II.47}$$

$$(ii) \qquad \forall\, q \in M \;\; \exists\, W \in \mathfrak{T}(q): \quad \big|\big\{ \alpha \in \mathcal{J} \,\big|\, V_\alpha \cap W \neq \emptyset \big\}\big| < \infty\,; \tag{II.48}$$

$$(iii) \qquad \forall\, q \in M: \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \chi_\alpha(q) = 1\,; \tag{II.49}$$

$$(iv) \qquad \forall\, (U, \varphi) \in \mathcal{A},\; \alpha \in \mathcal{J}, V_\alpha \cap U \neq \emptyset: \quad (\chi_\alpha \circ \varphi^{-1}) \in C^\infty\big(\varphi(V_\alpha \cap U); [0,1]\big)\,. \tag{II.50}$$

Satz II.13. Sind $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathfrak{T}$ eine offene Überdeckung von M, so gibt es eine zu $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ gehörige, abzählbare Partition $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subseteq C(M; [0,1])$ der Eins.

Beweis. Nach Satz II.11 gibt es eine kompakte Ausschöpfung von M, d.h. eine Folge $(K_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{P}(M)^{\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen, sodass $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $M = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$.
Ist $p \in M$, so gibt es aufgrund der Überdeckungseigenschaften $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathcal{I}$ und $(S_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$ so, dass $p \in (K_{n+1} \setminus K_n) \cap U_i \cap S_p$, wobei wir $K_0 := \emptyset$ notieren. Für $\varepsilon_p > 0$ genügend klein ist dann auch

$$V(p) := \varphi_p^{-1}\big[B\big(\varphi_p(p),\, 3\varepsilon_p\big)\big] \subseteq \big(\overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_n\big) \cap U_i \cap S_p\,. \tag{II.51}$$

Für $n = 1$ ist dann $\{V(p) \,|\, p \in K_1\} \subseteq \mathfrak{T}$ eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, gibt es $L(1) \in \mathbb{N}$ und $q_1, q_2, \ldots q_{L(1)} \in K_1$ so, dass

$$K_1 \subseteq \bigcup_{\ell = L(0)+1}^{L(1)} V(q_\ell)\,, \tag{II.52}$$

wobei $L(0) := 0 < L(1)$. Genauso gibt es $L(2) \in \mathbb{N}$, $L(2) > L(1)$ und $q_{L(1)+1}, \ldots q_{L(2)} \in K_2 \setminus \mathring{K}_1$ so, dass

$$K_2 \setminus \mathring{K}_1 \subseteq \bigcup_{\ell=L(1)+1}^{L(2)} V(q_\ell) \tag{II.53}$$

usw. Allgemein folgt induktiv, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $L(n+1) \in \mathbb{N}$, $L(n+1) > L(n)$ und $q_{L(n)+1}, \ldots q_{L(n+1)} \in K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$ so gibt, dass

$$K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n \subseteq \bigcup_{\ell=L(n)+1}^{L(n+1)} V(q_\ell) \,. \tag{II.54}$$

Zusammengefügt erhalten wir eine Folge $(q_\ell)_{\ell=1}^\infty \in M^{\mathbb{N}}$ von Punkten, sodass $\{V(q_\ell)\}_{\ell=1}^\infty$ eine offene Überdeckung von M ist.

Sei weiterhin $\ell \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $L(m) < \ell \leq L(m+1)$, und es sind $q_\ell \in K_{m+1} \setminus \mathring{K}_m$ und $V(q_\ell) \subseteq \mathring{K}_{m+2} \setminus K_m$ gemäß (II.51). Insbesondere gilt

$$V(q_\ell) \cap (K_{n+1} \setminus K_n) = \emptyset \,, \tag{II.55}$$

falls $n+1 \leq m$, d.h. falls $\ell > L(n+1)$, und ebenso falls $n \geq m+2$, d.h. falls $n \geq 2$ und $\ell \leq L(n-1)$.

Sind nun $p \in M$ und dann $n(p) \in \mathbb{N}_0$, $i(p) \in \mathcal{I}$ und $(S_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}$ so, dass $p \in (K_{n(p)+1} \setminus K_{n(p)}) \cap U_{i(p)} \cap S_p$, so sind $V(p) \in \mathfrak{T}(p)$ und $V(p) \subseteq \mathring{K}_{n(p)+2} \setminus K_{n(p)}$, gemäß (II.51). Außerdem folgt aus (II.55), dass

$$\Big| \big\{ \ell \in \mathbb{N} \;\big|\; V(q_\ell) \cap V(p) \neq \emptyset \big\} \Big| \leq L[n(p)+1] - L[\max\{n(p)-1, 0\}] < \infty \,. \tag{II.56}$$

Wir wählen nun eine Funktion $f \in C^\infty\big(\mathbb{R}_0^+; [0,1]\big)$, für die $f \equiv 1$ auf $[0,1]$, $f' \leq 0$ und $f \equiv 0$ auf $[2, \infty)$ gilt. Für $\ell \in \mathbb{N}$ kürzen wir $(V_\ell, \varphi_\ell) := \big(V(q_\ell), \varphi_{q_\ell}\big)$, $\xi_\ell := \varphi_\ell(q_\ell)$ und $\varepsilon_\ell := \varepsilon_{q_\ell}$ ab und definieren eine Funktion $\gamma_\ell : M \to [0,1]$ durch

$$\forall\, p \in V_\ell = \varphi_\ell^{-1}\big[B\big(\xi_\ell \,,\, 3\varepsilon_\ell\big)\big] : \quad \gamma_\ell(p) := f\left[\left(\frac{\varphi_\ell(p) - \xi_\ell}{\varepsilon_\ell}\right)^2\right] \tag{II.57}$$

und $\gamma_\ell \equiv 0$ auf $M \setminus V_\ell$. Offensichtlich ist

$$\forall\, \xi \in \varphi_\ell[V_\ell] = B\big(\xi_\ell, 3\varepsilon_\ell\big)\big] : \quad \big[\gamma_\ell \circ \varphi_\ell^{-1}\big](\xi) = f\left[\left(\frac{\xi - \xi_\ell}{\varepsilon_\ell}\right)^2\right], \tag{II.58}$$

und somit ist $\gamma_\ell \circ \varphi^{-1} = \big[\gamma_\ell \circ \varphi_\ell^{-1}\big] \circ \big[\varphi_\ell \circ \varphi^{-1}\big] \in C^\infty\big(\varphi[\mathrm{supp}(\gamma_\ell) \cap U]\big)$, für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $\mathrm{supp}(\gamma_\ell) \cap U \neq \emptyset$.

Wir definieren schließlich $\chi_\ell : M \to [0,1]$ für $p \in M$ durch

$$\chi_\ell(p) := \left(\sum_{\ell'=1}^\infty \gamma_{\ell'}(p) \right)^{-1} \cdot \gamma_\ell(p) = \left(\sum_{\ell'=L[\max\{n(p)-1,0\}]}^{L[n(p)+1]} \gamma_{\ell'}(p) \right)^{-1} \cdot \gamma_\ell(p) \,, \tag{II.59}$$

so dass offensichtlich $\chi_\ell \circ \varphi^{-1} \in C^\infty\big(\varphi[\mathrm{supp}(\chi_\ell) \cap U]\big)$, für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $\mathrm{supp}(\chi_\ell) \cap U \neq \emptyset$ und

$$\forall\, p \in M: \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \chi_\ell(p) \;=\; 1 \tag{II.60}$$

gelten. Offenbar ist $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ eine zu $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ gehörige, abzählbare Partition der Eins. $\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Eigenschaft einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, eine abzählbare und lokal endliche Partition der Eins zu besitzen, wird für uns an Bedeutung gewinnen, wenn wir Immersionen diskutieren und wenn wir Integrale über Mannigfaltigkeiten definieren.
- Zunächst wenden wir uns jedoch dem Begriff differenzierbarer Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu. Dazu erinnern wir an den Begriff der k-fach stetig differenzierbaren Abbildungen, den wir von auf offenen Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ auf beliebige nichtleere Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^m$ wie folgt verallgemeinern.
- Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt $f : A \to \mathbb{R}^n$ ***k*-mal stetig differenzierbar, $\boldsymbol{f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)}$**

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists\, \Omega \in \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^m},\ \Omega \supseteq A,\ \tilde{f} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n): \quad f \;=\; \tilde{f}\restriction_A . \tag{II.61}$$

Definition II.14. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten und $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt ***k*-mal stetig differenzierbar, $\boldsymbol{f \in C^k(M; N)}$**

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall\, (U, \varphi) \in \mathcal{A},\ (V, \psi) \in \mathcal{B},\ W := U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset :$$
$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big) \;\in\; C^k\big(\varphi(W); [\psi \circ f](W)\big) . \tag{II.62}$$

(ii) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mathcal{M} = \big((a,b),\ \mathfrak{T}_{\mathbb{R}},\ \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}\big) =: (a, b)$, so heißt $f \in C^k\big((a,b); N\big)$ **$\boldsymbol{C^k}$-Kurve in $\boldsymbol{N}$**. Außerdem schreiben wir $\boldsymbol{C^k(M)} := C^k(M; M)$.

(iii) Sind $f : M \to N$ bijektiv und $f \in C^\infty(M; N)$ sowie auch $f^{-1} \in C^\infty(N; M)$, so nennen wir f einen **Diffeomorphismus**. In diesem Fall heißen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ **diffeomorph**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Der Begriff der k-fachen stetigen Differenzierbarkeit ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von den zu Grunde liegenden Atlanten innerhalb der ihrer Äquivalenzklasse. In der Tat, sind $(U, \varphi), (\widetilde{U}, \underline{\tilde{x}})$ zwei miteinander verträgliche Karten von M und $(V, \psi), (\widetilde{V}, \underline{\tilde{y}})$ zwei miteinander verträgliche Karten von N so, dass $W := U \cap \widetilde{U} \cap f^{-1}(V \cap \widetilde{V}) \neq \emptyset$, so ist

$$\underline{\tilde{y}} \circ f \circ \underline{\tilde{x}}^{-1} \;=\; (\underline{\tilde{y}} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \underline{\tilde{x}}^{-1}) \tag{II.63}$$

auf W, und wegen der Glattheit von $\underline{\tilde{y}} \circ \psi^{-1}$ und $\varphi \circ \underline{\tilde{x}}^{-1}$ ist

$$(\underline{\tilde{y}} \circ f \circ \underline{\tilde{x}}^{-1}) \in C^k\big(\underline{\tilde{x}}(W); [\underline{\tilde{y}} \circ f](W)\big) \;\Leftrightarrow\; (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \in C^k\big(\varphi(W); [\psi \circ f](W)\big) . \tag{II.64}$$

- Wird $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ durch eine einzige Karte (M, φ) dargestellt, d.h. ist $\mathcal{A} = \{(M, \varphi)\}$, so ist $\varphi : M \to \varphi(M)$ ein Diffeomorphismus, wobei wir $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^m$ als Mannigfaltigkeit mit Atlas $\big\{\big(\varphi(M), \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\big)\big\}$ auffassen.
- Ist $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}}, \mathcal{A}_1)$ mit $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ und $\varphi(x) = x^3$, so ist $\mathcal{M}_1$ diffeomorph zu $\mathcal{M}_1' = (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
- Sind $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2' = (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, so ist jedoch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, kein Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_2'$, da

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \;\notin\; C^\infty(\mathcal{M}_2; \mathcal{M}_2') \,. \tag{II.65}$$

- Aus diesen, zunächst verwirrenden Beispielen lernen wir, dass derselbe topologische Raum (hier: $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}})$ verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen tragen kann: Im vorletzten Beispiel ist $x \mapsto x^3$ die die Mannigfaltigkeit definierende Kartenabbildung. Wenngleich $\mathcal{M}_1'$ und $\mathcal{M}_2'$ dieselbe Topologien besitzen, sind in $\mathcal{M}_1$ die Punkte um $p = 0$ unendlich stark verdichtet.

Definition II.15. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit. Eine Mannigfaltigkeit $\widehat{\mathcal{M}} = (\widehat{M}, \widehat{\mathfrak{T}}, \widehat{\mathcal{A}})$ heißt **Überlagerungsmannigfaltigkeit (von $\mathcal{M}$)**

$:\Leftrightarrow$ Es gibt eine Abbildung $\pi \in C^\infty(\widehat{\mathcal{M}}; \mathcal{M})$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$\forall\, p \in M : \quad \pi^{-1}[\{p\}] \;\subseteq\; \widehat{M} \text{ ist abzählbar und} \tag{II.66}$$

$$\forall\, p \in M \;\exists V \in \mathfrak{T}(p) : \quad \pi^{-1}[V] \text{ ist diffeomorph zu } V \times \pi^{-1}[\{p\}] \,. \tag{II.67}$$

In diesem Fall nennt man π **Projektion von $\widehat{\mathcal{M}}$ auf $\mathcal{M}$.**

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 = (S^1, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}, \{C_\pm\})$ und $\widehat{\mathcal{M}} = (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$. Wir stellen $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ als komplexe Zahlen vom Betrag eins dar.
- Wir definieren die Projektion $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ durch

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} : \pi(\alpha) \;:=\; e^{i\alpha} \,. \tag{II.68}$$

  und beobachten, dass

$$\pi^{-1}[\{e^{i\beta}\}] \;=\; \beta + 2\pi\mathbb{Z} \,. \tag{II.69}$$

- Weiterhin ist $V := \{e^{i\alpha} \,|\, \alpha \in I_{\beta,\varepsilon}\} \in \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}(\beta)$ für $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung von β, wobei $I_{\beta,\varepsilon} := (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$. Ihr Urbild unter π ist gegeben durch

$$\pi^{-1}[V] \;=\; I_{\beta,\varepsilon} + 2\pi\mathbb{Z} \,. \tag{II.70}$$

- Für $\varepsilon < \pi$ ist $I_{\beta,\varepsilon} + 2\pi\mathbb{Z}$ eine nichtzusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit. Weiterhin gibt es dann zu jedem $\hat{p} \in I_{\beta,\varepsilon} + 2\pi\mathbb{Z}$ genau ein $\alpha(\hat{p}) \in I_{\beta,\varepsilon}$ und genau ein $n(\hat{p}) \in \mathbb{Z}$ so, dass $\hat{p} = \alpha(\hat{p}) + 2\pi n(\hat{p})$.

- Man prüft nun leicht nach, dass

$$J : I_{\beta,\varepsilon} + 2\pi\mathbb{Z} \ \rightarrow \ I_{\beta,\varepsilon} \times \mathbb{Z}\,, \quad \hat{p} \ \mapsto \ \big(\alpha(\hat{p}),\, n(\hat{p})\big) \tag{II.71}$$

ein Diffeomorphismus ist.
- Folglich ist $\mathbb{R}$ eine Überlagerungsmannigfaltigkeit von $\mathbb{S}^1$ mit Projektion π von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{S}^1$.

Definition II.16. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimensionen m. Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ heißt **Teilmannigfaltigkeit (von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$) der Dimensionen $\boldsymbol{n}$.** $:\Leftrightarrow$ $n < m$, $N \subseteq M$ ist Teilmenge von M, die Topologie auf N ist die $\mathfrak{T}$ induzierte relative Topologie $\mathfrak{S} = \{U \cap N \,|U \in \mathfrak{T}\}$, und es gibt einen mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlas $\mathcal{A}'$ von M, sodass

$$(i) \qquad \forall\,(U,\varphi) \in \mathcal{A}' : \quad U \cap N = \big\{p \in U \,\big|\, \varphi^{n+1}(p) = \varphi^{n+2}(p) = \cdots = \varphi^{m}(p) = 0\big\}\,; \tag{II.72}$$

$$(i) \quad \big\{\big(U \cap N, (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)\big) \,\big|\, (U,\varphi) \in \mathcal{A}'\big\} \text{ ist ein mit } \mathcal{B} \text{ verträglicher Atlas von } N. \tag{II.73}$$

Aus Satz II.8 erhalten wir mit diesen Begriffen sofort folgendes Korollar.

Korollar II.17. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m - 1$, $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, $F \in C^\infty(M; \mathbb{R}^{m-n})$ und $N := \{p \in M | F(p) = 0\}$. Ist $\mathrm{rk}[F] = m - n$ auf N, so ist $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathcal{M}$ der Dimension n (bezüglich eines durch lokale Auflösungen von $F(p) = 0$ gewonnenen Atlas $\mathcal{B}$).

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $m = 2$, $n = 1$, $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}}, \mathcal{A})$ und

$$N \ = \ S^1 \ = \ \big\{q = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ \|q\|^2_{\mathrm{eukl}} = a^2 + b^2 = 1\big\} \ \subseteq \ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \tag{II.74}$$

wobei $\mathcal{A} = \{D_+, D_-\}$ mit $D_\pm = (W_\pm, \psi_\pm)$, $W_\pm := \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^\pm_0)$ und

$$\forall\, q = (a,b) \in W_\pm : \quad \varphi^1_\pm(q) \ := \ \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2} \mp b}\,, \quad \varphi^2_\pm(q) \ := \ a^2 + b^2 - 1\,. \tag{II.75}$$

- Dann sind

$$W_\pm \cap S^1 \ = \ \big\{q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ \big| \ \varphi^2_\pm(q) = 0\big\} \ = \ U_\pm \tag{II.76}$$

und

$$\mathcal{A}' \ := \ \big\{(W_+ \cap S^1, \varphi^2_+)\,,\ (V_- \cap S^1, \varphi^2_-)\big\} \ = \ \{C_+, C_-\} \tag{II.77}$$

ist gerade der in (II.26)-(II.27) definierte Atlas der stereografischen Projektionen.
- Also ist $\mathbb{S}^1$ eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

II.5. Ergänzungen

II.5.1. Existenz kompakter Ausschöpfungen - Beweis von Satz II.11:

Seien $q \in M$ und $C_q = (U_q, \varphi_q) \in \mathcal{A}$ eine Karte mit $U \ni q$. Für $\varepsilon_q > 0$ genügend klein ist

$$\overline{B(\varphi_q(q), \varepsilon_q)} \subseteq \varphi_q(U_q) \tag{II.78}$$

und mit

$$V_q := \varphi_q^{-1}\big[B(\varphi_q(q), \varepsilon_q)\big] \tag{II.79}$$

ist $\{V_q\}_{q \in M}$ eine offene Überdeckung von M, und als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung φ_q^{-1} ist

$$\forall\, q \in M: \quad \overline{V_q} = \varphi_q^{-1}\Big[\overline{B(\varphi_q(q), \varepsilon_q)}\Big] \ \text{ kompakt.} \tag{II.80}$$

Nach Voraussetzung ist $(M, \mathfrak{T})$ parakompakt, und es existiert eine lokal endliche Überdeckung $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ von M, wobei es für jedes $q \in M$ ein solches $\alpha \in \mathcal{J}$ gibt, dass $W_\alpha \subseteq V_q$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{V_q}$ ist auch

$$\forall\, \alpha \in \mathcal{J}: \qquad \overline{W_\alpha} \ \text{ kompakt.} \tag{II.81}$$

Da $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ lokal endlich ist, gibt es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $S_p \in \mathfrak{T}(p)$, und eine endliche Menge $\mathcal{I}_p \subseteq \mathcal{J}$, $|\mathcal{I}_p| < \infty$ so, dass

$$\forall\, \alpha \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}_p: \quad W_\alpha \cap S_p = \emptyset, \tag{II.82}$$

d.h. nur endlich viele W_α schneiden S_p. Da $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ eine Überdeckung von M ist, gilt natürlich auch $S_p \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_p} W_\alpha$.

Sei nun $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist $\{S_p\}_{p \in K}$ eine offene Überdeckung von K, und daher gibt es $p_1, \ldots, p_L \in K$, so dass $K \subseteq S_{p_1} \cup S_{p_2} \cup \cdots \cup S_{p_L}$. Mit $\mathcal{I}(K) := \mathcal{I}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{p_L}$ gilt dann aber

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}(K)} W_\alpha\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}(K): \quad W_\alpha \cap K = \emptyset. \tag{II.83}$$

Wegen

$$|\mathcal{I}(K)| = |\mathcal{I}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{p_L}| \leq \sum_{\ell=1}^{L} |\mathcal{I}_{p_\ell}| < \infty \tag{II.84}$$

bedeutet (II.83), dass auch K nur von endlich vielen W_α geschnitten wird.

Wir wählen nun $o \in \mathcal{J}$ so, dass $W_o \neq \emptyset$ und setzen

$$K_1 := \overline{W_o}\,, \qquad K_2 := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}(K_1)} \overline{W_\alpha} \tag{II.85}$$

und induktiv für $n \in \mathbb{N}$

$$K_{n+1} \ := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}(K_n)} \overline{W_\alpha}\,. \tag{II.86}$$

Offenbar ist K_1 kompakt. Sind $K_1, K_2, \ldots, K_n$ kompakt, so schneiden nur endliche viele W_α mit jeweils kompaktem Abschluss $\overline{W_\alpha}$ die Menge K_n, und deshalb ist dann auch K_{n+1} kompakt. Durch Induktion erhalten wir die Kompaktheit aller K_n, für $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$K_n \ \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}(K_n)} W_\alpha \ \subset \ \overset{\circ}{K}_{n+1}, \tag{II.87}$$

da $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}(K_n)} W_\alpha$ eine offene Teilmenge von K_{n+1} ist und somit in der größten offenen Teilmenge $\overset{\circ}{K}_{n+1} \subseteq K_{n+1}$ enthalten ist. Es verbleibt zu zeigen, dass

$$N \ := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \ = \ M \tag{II.88}$$

gilt. Wegen $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1} \subseteq K_{n+1}$ ist

$$N \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_{n+1} \tag{II.89}$$

als Vereinigung offener Mengen selbst offen.

Ist $q \in \overline{N}$, so gibt es ein $\alpha \in \mathcal{J}$ mit $W_\alpha \ni q$, da $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ eine offene Überdeckung ist. Dann gilt jedoch auch $N \cap W_\alpha \neq \emptyset$, denn anderenfalls wäre $\overline{N} \setminus W_\alpha \supseteq N$ eine echt größere abgeschlossene Menge als $\overline{N}$, die N umfasst, was der Definition des Abschlusses von N widerspräche. Wegen $N \cap W_\alpha \neq \emptyset$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $W_\alpha \cap K_n \neq \emptyset$. Aber dann gilt

$$q \ \in \ W_\alpha \ \subseteq \ K_{n+1} \ \subseteq \ N, \tag{II.90}$$

gemäß der Definition (II.86) von K_{n+1}. Also ist N auch abgeschlossen, und N^c ist offen. Da $M = N \cup N^c$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist und $N \supseteq W_o \neq \emptyset$ gilt, muss $N^c = \emptyset$ sein, d.h. (II.88) gilt.

III. Immersionen und Einbettungen

III.1. Immersionen als Abbildung vollen Ranges

Definition III.1. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $m = \dim(\mathcal{M})$ bzw. $n = \dim(\mathcal{N})$ und $f \in C^1(M; N)$.

(i) Sind $p \in M$ und $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ so, dass $p \in U \cap f^{-1}(V)$, so heißt

$$\mathrm{rk}[f](p) \;:=\; \mathrm{rk}\big[J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}\big(\varphi(p)\big)\big] \tag{III.1}$$

Rang von f bei p.

(ii) Die Funktion f heißt **Immersion (von M in N)** :⇔

$$\forall\, p \in M : \mathrm{rk}[f](p) \;=\; m\,. \tag{III.2}$$

(iii) Die Funktion f heißt **Einbettung (von M in N)** :⇔
Die Funktion f ist eine injektive Immersion und $f : (M, \mathfrak{T}) \to (N, \mathfrak{S})$ ist ein Homöomorphismus.

(iv) Die Funktion f heißt **Submersion (von M auf N)** :⇔

$$\forall\, p \in M : \mathrm{rk}[f](p) \;=\; n\,. \tag{III.3}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wie üblich ist der Rang von f bei $p \in M$ unabhängig von den gewählten Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ und insofern wohldefiniert.
- Ist $f \in C^1(M; N)$ eine Immersion, so ist $m \leq n$, da $\mathrm{rk}[f] \leq \min\{m, n\}$.
- Ist $f \in C^1(M; N)$ eine Submersion, so ist $m \geq n$, abermals wegen $\mathrm{rk}[f] \leq \min\{m, n\}$.

III.2. Matrizen festen Ranges

Im Folgenden seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$, und wir betrachten reelle $n \times m$-Matrizen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{III.4}$$

Zu jedem Paar (I, J) von Teilmengen $I = \{i(1), i(2), \ldots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, mit $1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \ldots, j(k')\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ bezeichnen wir mit $A(I, J) \in \mathbb{R}^{k\times k'}$ die reelle $k \times k'$-Matrix

$$A(I,J) \;:=\; \begin{pmatrix} a_{i(1),j(1)} & \cdots & a_{i(1),j(k')} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i(k),j(1)} & \cdots & a_{i(k),j(k')} \end{pmatrix}. \tag{III.5}$$

Lemma III.2. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und $A = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}_1^n, j\in\mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine reelle $n \times m$-Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{rk}[A] \;\geq\; k \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, I \subseteq \mathbb{Z}_1^n \;\; J \subseteq \mathbb{Z}_1^m \;\; |I| = |J| = k : \quad \det[A(I,J)] \;\neq\; 0\,. \tag{III.6}$$

Beweis. <u>$\Rightarrow$:</u> Ist $\mathrm{rk}[A] \geq k$, so ist insbesondere der Spaltenrang von A mindestens gleich k und es gibt (mindestens) k linear unabhängige Spaltenvektoren $\vec{b}_{j(1)}, \vec{b}_{j(2)}, \ldots, \vec{b}_{j(k)}$, wobei $1 \leq j(1) < j(2) < \ldots < j(k) \leq m$ und

$$\vec{b}_j \;:=\; \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}. \tag{III.7}$$

Dies ist gleichwertig mit der Aussage, dass die $n \times k$-Matrix

$$A(\mathbb{Z}_1^n, J) \;:=\; \begin{pmatrix} a_{1,j(1)} & \cdots & a_{1,j(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,j(1)} & \cdots & a_{n,j(k)} \end{pmatrix} \tag{III.8}$$

vom Rang $\mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, J)] = k$ ist, wobei $J = \{j(1), j(2), \ldots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$. Dies zieht jedoch die Existenz einer solchen Menge $I = \{i(1), i(2), \ldots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, mit $1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(k) \leq n$, nach sich, dass der Rang der $k \times k$-Matrix $A(I, J)$ gleich k und sie somit invertibel ist, was $\det[A(I, J)] \neq 0$ impliziert.

<u>$\Leftarrow$:</u> Seien $\det[A(I, J)] \neq 0$, wobei $I = \{i(1), i(2), \ldots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, $1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \ldots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$, $1 \leq j(1) < j(2) < \ldots < j(k) \leq m$. Mit der Notation aus Glg. (III.7) ist dann $\{\vec{b}_{j(1)}, \vec{b}_{j(2)}, \ldots, \vec{b}_{j(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine linear unabhängige, k-elementige Teilmenge von Spaltenvektoren in A und der Rang von A ist mindestens gleich k. $\square$

Korollar III.3. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und $A = (a_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}_1^n, j \in \mathbb{Z}_1^m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine reelle $n \times m$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{rk}[A] \; = \; k$;

(ii) Es gibt $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I| = |J| = k$ so, dass $\det[A(I, J)] \neq 0$, und für alle $I' \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J' \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I'| = |J'| = k + 1$ gilt $\det[A(I', J')] = 0$.

(iii) Es gibt $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ und $J \subseteq \mathbb{Z}_1^m$ mit $|I| = |J| = k$ so, dass $\det[A_{I,J}] \neq 0$, und für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_1^n \setminus I$ und $\beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J$ gilt $\det[A_{I \cup \{\alpha\}\,,\, J \cup \{\beta\}}] = 0$.

Beweis. Lemma III.2 impliziert, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und trivialerweise gilt auch (ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Aussage folgt also, wenn wir (iii) $\Rightarrow$ (i) zeigen. Dazu können wir $k+1 \leq \min\{m, n\}$ annehmen, denn für $k = \min\{m, n\}$ gibt es nichts zu beweisen.

Seien also $I = \{i(1), i(2), \ldots, i(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^n$, $1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(k) \leq n$, und $J = \{j(1), j(2), \ldots, j(k)\} \subseteq \mathbb{Z}_1^m$, $1 \leq j(1) < j(2) < \ldots < j(k) \leq m$, so, dass $\det[A(I, J)] \neq 0$ sowie $\beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J$. Nach geeigneter Zeilen- und Spaltenvertauschung können wir o.B.d.A. annehmen, dass $I = J = \mathbb{Z}_1^k$ und $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$ sind. Für $i \in \mathbb{Z}_1^n$ setzen wir nun

$$\vec{c}_i \; = \; (a_{i,1}\,, \ldots, \, a_{i,k}\,, \, a_{i,\beta}) \; \in \; \mathbb{R}^{k+1} \tag{III.9}$$

Dann ist $\det[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k)] \neq 0$ und demgemäß ist

$$A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\}) \; = \; \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_k \end{pmatrix} \tag{III.10}$$

eine Matrix vom Rang $\mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^k, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = k$ und deshalb $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k) := \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k\} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ linear unabhängig. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ folgt aus (iii), dass

$$0 \; = \; \det[A(\mathbb{Z}_1^k \cup \{\alpha\}, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\}) \; = \; \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,\beta} \\ a_{\alpha,1} & \cdots & a_{\alpha,k} & a_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_k \\ \vec{c}_\alpha \end{pmatrix}, \tag{III.11}$$

und deshalb ist $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k) \cup \{\vec{c}_\alpha\}$ linear abhängig. Es folgt, dass $\vec{c}_\alpha \in \mathrm{span}[\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k)]$. Da $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ beliebig ist, erhalten wir, dass

$$\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k\,, \; \vec{c}_{k+1}\,, \ldots, \; \vec{c}_n \; \in \; \mathrm{span}[\mathcal{C}(\mathbb{Z}_1^k)] \tag{III.12}$$

und somit

$$\forall\, \beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m : \qquad \mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] \; = \; \mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k)] \; = \; k\,. \tag{III.13}$$

Setzen wir wieder

$$\vec{b}_j \; := \; \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \tag{III.14}$$

so sind $A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k) = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ und wegen $\mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k)] = k$ die Menge $\mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k] := \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. Weiterhin sind wegen $\mathrm{rk}[A(\mathbb{Z}_1^n, \mathbb{Z}_1^k \cup \{\beta\})] = k$ die Menge $\mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k] \cup \{\vec{b}_\beta\}$ linear abhängig und deshalb $\vec{b}_\beta \in \mathcal{B}[\mathbb{Z}_1^k]$, für alle $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$. Wir erhalten

$$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\,,\ \vec{b}_{k+1}\,, \ldots,\ \vec{b}_n \ \in\ \mathrm{span}[\mathcal{B}(\mathbb{Z}_1^k)] \tag{III.15}$$

und somit

$$\mathrm{rk}[A] \ =\ \mathrm{rk}\big[(\vec{b}_1\,, \ldots\,,\ \vec{b}_k\,,\ \vec{b}_{k+1}\,, \ldots\,,\ \vec{b}_n)\big] \ =\ k\,. \tag{III.16}$$

$\square$

Satz III.4. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{m, n\}$ und

$$\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k} \ :=\ \big\{A \in \mathbb{R}^{n\times m}\ \big|\ \mathrm{rk}[A] \ =\ k\big\}\,, \tag{III.17}$$

$$\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k} \ :=\ \big\{A \in \mathbb{R}^{n\times m}\ \big|\ \mathrm{rk}[A] \ \geq\ k\big\}\,. \tag{III.18}$$

Dann ist $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k} \ \subseteq\ \mathbb{R}^{n\cdot m}$ offen und $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k} \subseteq\ \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k}$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times m}$ der Dimension $k(m + n - k)$.

Beweis. Gemäß Lemma III.2 ist

$$\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k} \ =\ \bigcup_{I\subseteq\mathbb{Z}_1^n, J\subseteq\mathbb{Z}_1^m, |I|=|J|=k} \mathcal{E}(I,J)\,, \quad \text{wobei} \tag{III.19}$$

$$\mathcal{E}(I,J) \ :=\ \big\{A \in \mathbb{R}^{n\times m}\ \big|\ \det[A(I,J)] \ \neq\ 0\big\}\,. \tag{III.20}$$

Die Mengen $\mathcal{E}(I,J) \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ sind offen und damit auch $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k} \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$. Trivialerweise ist $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k} \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n \cdot m$.

Weiterhin ist $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k} = \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\geq k}$ im Fall, dass $k = \min\{m, n\}$, und wir können o.B.d.A. im Weiteren $k + 1 \leq \min\{m, n\}$ annehmen. Nach Lemma III.3 (iii) ist

$$\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k} \ =\ \bigcup_{I\subseteq\mathbb{Z}_1^n, J\subseteq\mathbb{Z}_1^m, |I|=|J|=k} \mathcal{L}(I,J)\,, \quad \text{wobei} \tag{III.21}$$

$$\mathcal{L}(I,J) \ :=\ \Big\{A \in \mathcal{E}(I,J)\ \Big|\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_1^n \setminus I\,,\ \beta \in \mathbb{Z}_1^m \setminus J: \ \ \det[A(I \cup \{\alpha\}\,,\ J \cup \{\beta\})] \ =\ 0\Big\}\,. \tag{III.22}$$

Sind etwa $I = J = \mathbb{Z}_1^k$, so definieren wir $F_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{Z}_{k+1}^n$ und $\beta \in \mathbb{Z}_{k+1}^m$ durch

$$F_{\alpha,\beta}(A) \ =\ \det[A(\mathbb{Z}_1^k \cup \{k+\alpha\}\,,\ \mathbb{Z}_1^k \cup \{k+\beta\})] \ =\ \det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,\beta} \\ a_{\alpha,1} & \cdots & a_{\alpha,k} & a_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}\right] \tag{III.23}$$

und weiterhin $F : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{(n-k)\times(m-k)}$ durch

$$F(A) \;:=\; \big(F_{\alpha,\beta}(A)\big)_{\alpha\in\mathbb{Z}_1^{n-k},\beta\in\mathbb{Z}_1^{m-k}} \;=\; \begin{pmatrix} F_{1,1}(A) & \cdots & F_{1,m-k}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-k,1}(A) & \cdots & F_{n-k,m-k}(A) \end{pmatrix}. \tag{III.24}$$

Nach dem Leibnizschen Entwicklungssatz ist

$$F_{\alpha,\beta}(A) \;=\; a_{\alpha,\beta}\cdot \det[A(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)] \;+\; R(A) \tag{III.25}$$

wobei $R(A)$ von Matrixelementen $a_{i,j}$ abhängt, für die $(i\le k)\vee(j\le k)$ gilt. Für $i,\alpha\in\mathbb{Z}_{k+1}^n$ und $j,\beta\in\mathbb{Z}_{k+1}^m$ ist also

$$\frac{\partial F_{\alpha,\beta}(A)}{\partial a_{i,j}} \;=\; \delta_{i,\alpha}\,\delta_{j,\beta}\,\det[A(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)]\,. \tag{III.26}$$

Da $\det[A(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)]\neq 0$ auf $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)$ ist, folgt daraus

$$\forall\, A\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k): \qquad \mathrm{rk}[J_F(A)] \;=\; (n-k)(m-k)\,, \tag{III.27}$$

und dass J_F auf $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)$ somit maximalen Rang besitzt. Nach Korollar II.17 ist damit

$$\mathcal{L}(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k) \;=\; \Big\{A\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}_1^k,\mathbb{Z}_1^k)\;\Big|\;\mathrm{rk}[F(A)] \;=\; 0\Big\} \tag{III.28}$$

und entsprechend auch $\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k} = \bigcup_{I\subseteq\mathbb{Z}_1^n,J\subseteq\mathbb{Z}_1^m,|I|=|J|=k}\mathcal{L}(I,J)\subseteq\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}\ge k}$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim\big[\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k}\big] \;=\; nm-(n-k)(m-k) \;=\; k(m+n-k)\,. \tag{III.29}$$

□

III.3. Immersions- und Einbettungsätze

Lemma III.5. Seien $m,n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge 2m$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$ offen und nichtleer und $f\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $A=(a_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}_1^n,j\in\mathbb{Z}_1^m}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\max_{i\in\mathbb{Z}_1^n,j\in\mathbb{Z}_1^m}|a_{i,j}|\le\varepsilon$ so, dass mit $f_A(x)=f(x)+Ax$ die Funktion $f_A\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ eine Immersion ist.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $m\ge 2$, der Fall $m=1$ ist eine Übungsaufgabe. Wir bezeichnen mit $J:=J_f$ die Jacobi-Matrix von f und mit $J_A:=J+A$ die Jacobi-Matrix von A. Es ist zu zeigen, dass eine Matrix $A=(a_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}_1^n,j\in\mathbb{Z}_1^m}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, sodass

$$\forall\, x\in\Omega: \quad \mathrm{rk}[J_A(x)]=m \quad\text{und}\quad \forall\, i\in\mathbb{Z}_1^n, j\in\mathbb{Z}_1^m: \quad |a_{i,j}|\le\varepsilon\,. \tag{III.30}$$

Wir fixieren $k\in\mathbb{Z}_1^{m-1}$ und betrachten die Abbildung $F_k\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k};\,\mathbb{R}^{n\times m})$,

$$(x,B) \;\mapsto\; F_k(x,B) \;:=\; B-J(x)\,. \tag{III.31}$$

Da $m - k \geq 1$ ist, folgt

$$\dim[\mathbb{R}^{n\times m}] - \dim[\Omega \times \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k}] \;=\; mn - \big\{m + k(m+n-k)\big\} \;=\; mn - m - km - kn + k^2$$
$$= (n-k)(m-k) - m \;\geq\; (2m-k)(m-k) - m \;\geq\; (m+1)\cdot 1 - m \;=\; 1\,. \quad \text{(III.32)}$$

Da F_k stetig differenzierbar ist, ist das (nm)-dimensionale Lebesgue-Maß des Bildes von F_k gleich null, für alle $k \in \mathbb{Z}_1^{m-1}$, und wir erhalten

$$\mu_{\mathbb{R}^{n\times m}}[W] \;=\; 0\,, \quad \text{wobei} \quad W \;:=\; \bigcup_{k=1}^{m-1} F_k\big(\Omega \times \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k}\big)\,. \tag{III.33}$$

In diese Aussage geht die stetige Differenzierbarkeit von F_k in subtiler Weise ein, was wir jedoch aus Zeitmangel nicht näher erläutern; wir erinnern aber an Satz II.4, der zeigt, dass die bloße Stetigkeit der Abbildung F_k für (III.33) nicht ausreichen würde.

Aus (III.33) folgt insbesondere, dass $W \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ keine inneren Punkte enthält, und wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A = (a_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}_1^n, j\in\mathbb{Z}_1^m} \in W^c$ mit $\max_{i\in\mathbb{Z}_1^n, j\in\mathbb{Z}_1^m} |a_{i,j}| \leq \varepsilon$ finden. Aus der Definition (III.33) von W folgt dann, dass

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_1^{m-1}\,,\; x \in \Omega\,,\; B \in \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k}: \quad A \neq B - J(x)\,, \tag{III.34}$$

was nach Auflösen zu $J_A(x) = J(x) + A \neq B$ impliziert, dass

$$J_A(x) \notin \bigcup_{k=1}^{m-1} \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=k}\,, \quad \text{also} \quad J_A(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}_{\mathrm{rk}=m} \tag{III.35}$$

für jedes $x \in \Omega$ gilt. Dies bedeutet jedoch, dass $\mathrm{rk}[F_A] = m$ auf Ω ist. □

Lemma III.6. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m und $f \in C^1(M; \mathbb{R}^{n+1})$ mit $n \geq m+1$. Sind $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $K \subseteq U$ kompakt und $\mathrm{rk}[f] = m$ auf K, so gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall\, h \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})\,,\; \max_{q\in K} \big\| J_{h\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \big\|_{\mathrm{op}} \leq \delta: \quad \mathrm{rk}[f+h] \;=\; m \;\text{ auf } K\,. \tag{III.36}$$

Beweis. Wir führen die Notation $J^{(f)} = (J^{(f)}_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}_1^n, j\in\mathbb{Z}_1^m} := J_{f\circ\varphi^{-1}} \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^{n\times m}$ ein und bezeichnen mit $J^{(f)}_I := (J^{(f)}_{i,j})_{i\in I, j\in\mathbb{Z}_1^m} : U \to \mathbb{R}^{m\times m}$, für jede Teilmenge $I \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ mit $|I| = m$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{rk}[J^{(f)}(q)] = m$ und deshalb auch

$$D(q) \;:=\; \max\big\{|\det[J^{(f)}_I(q)]| \;\big|\; I \subseteq \mathbb{Z}_1^n\,,\; |I| = m\big\} \;>\; 0\,, \tag{III.37}$$

für alle $q \in K$. Die Abbildung $D : U \to \mathbb{R}^+$ ist stetig und nimmt deshalb auf K ein positives Minimum $2\varepsilon := \min_{q\in K} D(q) > 0$ an. Für jedes $q \in K$ gibt es also ein $I(q) \subseteq \mathbb{Z}_1^n$ mit $|I(q)| = m$ und $|\det[J^{(f)}_{I(q)}(q)]| \geq 2\varepsilon$. Definieren wir nun

$$V_q \;:=\; \big\{p \in U \;:\; |\det[J^{(f)}_{I(q)}(p)]| \;>\; \varepsilon\big\}\,, \tag{III.38}$$

so ist $\{V_q\}_{q\in K}$ eine offene Überdeckung von K, die wegen deren Kompaktheit eine endliche offene Überdeckung enthält, d.h. es gibt $L \in \mathbb{N}$ und $q(1), q(2), \ldots, q(L) \in K$ so, dass

$$K \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{L} K_\ell\,, \quad \text{wobei} \quad K_\ell \;:=\; K \cap \overline{V_{q(\ell)}} \quad \text{und} \quad \big|\det[J^{(f)}_{I(\ell)}]\big| \;\geq\; \varepsilon \;\; \text{auf} \;\; K_\ell \tag{III.39}$$

mit $I(\ell) := I(q(\ell))$ gilt. Insbesondere erhalten wir, dass $J^{(f)}_{I(\ell)}$ auf dem Kompaktum K_ℓ invertibel ist und

$$\Lambda \;:=\; \max\Big\{ \big\| \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \big\|_{\mathrm{op}} \;\Big|\; \ell \in \mathbb{Z}_1^L\,,\; q \in K_\ell \Big\} \;<\; \infty\,. \tag{III.40}$$

Glg. (III.40) kann beispielsweise direkt über die Darstellung der Inversen einer $m \times m$-Matrix mit Hilfe der Matrix der Minoren gewonnen werden.

Ist nun $h \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})$ mit

$$\max\big\{ \|J^{(h)}_{I(\ell)}(q)\|_{\mathrm{op}} \;\big|\; \ell \in \mathbb{Z}_1^L\,,\; q \in K_\ell \big\} \;\leq\; \delta \;:=\; \frac{1}{2\Lambda}\,, \tag{III.41}$$

so setzen wir

$$R_\ell(q) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \Big[J^{(h)}_{I(\ell)}(q) \cdot \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \Big]^k \tag{III.42}$$

und beobachten, dass diese Reihe in Norm konvergiert, da

$$\begin{aligned} \|R_\ell(q)\|_{\mathrm{op}} \;&\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \Big[J^{(h)}_{I(\ell)}(q) \cdot \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \Big]^k \Big\|_{\mathrm{op}} \\ &\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} \big\| \big(J^{(f)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \big\|_{\mathrm{op}}^{k+1} \, \|J^{(h)}_{I(\ell)}(q)\|_{\mathrm{op}}^k \;\leq\; \Lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \;=\; 2\Lambda \;<\; \infty\,. \end{aligned} \tag{III.43}$$

Außerdem sieht man leicht, dass

$$R_\ell(q) \cdot J^{(f+h)}_{I(\ell)}(q) \;=\; R_\ell(q) \cdot J^{(f)}_{I(\ell)}(q) \;+\; R_\ell(q) \cdot J^{(h)}_{I(\ell)}(q) \;=\; \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \tag{III.44}$$

und analog $J^{(f+h)}_{I(\ell)}(q) \cdot R_\ell(q) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}$, d.h.

$$R_\ell(q) \;=\; \big(J^{(f+h)}_{I(\ell)}(q)\big)^{-1} \tag{III.45}$$

und $\mathrm{rk}[f+h] = m$ auf K_ℓ. Fügen wir dies für alle $\ell \in \mathbb{Z}_1^L$ zusammen, erhalten wir $\mathrm{rk}[f+h] = m$ auf K. $\square$

Satz III.7. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension m, $f \in C^1(M; \mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 2m$ und $D \in C(M; \mathbb{R}^+)$. Dann existiert eine Immersion $g \in C^\infty(M; \mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^n$ so, dass

$$\forall\, q \in M: \quad \|f(q) - g(q)\| \;\leq\; D(q)\,. \tag{III.46}$$

Beweis. Nach Satz II.11 gibt es kompakte Mengen $K_r \subseteq \mathring{K}_{r+1}$ so, dass $M = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$. Wir vervenden im Weiteren den Beweis von Satz II.13, dem gemäß es weiterhin eine Partition $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq C^\infty(M;[0,1])$ der Eins, $\{q_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq M$, $\{\varepsilon_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ und $\{(U_\ell,\varphi_\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$, $\xi_\ell := \varphi_\ell(q_\ell)$ so gibt, dass

$$\chi_\ell \equiv 1 \;\text{ auf }\; \overline{V'_\ell}\,, \qquad \text{mit } V'_\ell := \varphi_\ell^{-1}[B(\xi_\ell,\varepsilon_\ell)]\,, \tag{III.47}$$

$$\mathrm{supp}[\chi_\ell] \subseteq V_\ell := \varphi_\ell^{-1}[B(\xi_\ell,3\varepsilon_\ell)]\,, \tag{III.48}$$

$$K_{r+1}\setminus \mathring{K}_r \subseteq \bigcup_{\ell=L(r)+1}^{L(r+1)} V'_\ell \subseteq \bigcup_{\ell=L(r)+1}^{L(r+1)} V_\ell \subseteq \mathring{K}_{r+2}\setminus K_{r-1}\,. \tag{III.49}$$

Sei $\delta_1 > 0$. Gemäß Lemma III.5 existiert $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\|A_1\|_\infty \le \delta_1$ so, dass

$$\tilde f_1 : B(\xi_1,3\varepsilon_1) \to \mathbb{R}^n\,, \quad \tilde f_1(\xi) := f[\varphi_1^{-1}(\xi)] + A_1(\xi-\xi_1) \tag{III.50}$$

eine Immersion ist, $\mathrm{rk}[\tilde f_1] = m$. Dann setzen wir

$$f_1(q) := f[q] + \chi_1(q)\cdot A_1[\varphi_1(q)-\xi_1]\,, \tag{III.51}$$

für $q \in M$ und beobachten, dass $f_1 = \tilde f_1 \circ \varphi_1$ auf V'_1 und daher

$$\mathrm{rk}[f_1] = \mathrm{rk}[\tilde f_1\circ\varphi_1] = m \tag{III.52}$$

auf $\overline{V'_1}$. Für jedes $q \in M$ ist weiterhin

$$\frac{\|f_1[q]-f[q]\|}{D(q)} \le \max_{\xi\in B(\xi_1,3\varepsilon_1)} \left\{ \frac{\|A_1(\xi-\xi_1)\|}{D[\varphi_1^{-1}(\xi)]} \right\} \le \frac{2\,\varepsilon_1\,\delta_1}{\min_{q\in\overline{W_1}}\{D(q)\}} \le \frac{1}{2}\,, \tag{III.53}$$

vorausgesetzt, wir wählen

$$\delta_1 := \frac{1}{4}\,\varepsilon_1 \min_{q\in\overline{W_1}}\{D(q)\} > 0\,. \tag{III.54}$$

Seien nun $L \in \mathbb{N}$ und $f_L \in C^\infty(M;\mathbb{R}^n)$ so definiert, dass

$$\mathrm{rk}[f_L] = m \;\text{ auf }\; \bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{V_\ell} \qquad \text{und} \qquad \forall\, q\in M: \; \frac{\|f_L[q]-f[q]\|}{D(q)} \le \sum_{\ell=1}^{L} 2^{-\ell}\,. \tag{III.55}$$

Zu $\delta_{L+1} > 0$ existieren gemäß Lemma III.5 $A_{L+1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\|A_{L+1}\|_\infty \le \delta_{L+1}$ so, dass

$$\mathrm{rk}[\tilde f_{L+1}] = m \quad \text{auf} \quad B(\xi_{L+1},3\varepsilon_{L+1})\,, \tag{III.56}$$

wobei

$$\tilde f_{L+1} : B(\xi_{L+1},3\varepsilon_{L+1}) \to \mathbb{R}^n\,, \quad \tilde f_{L+1}(\xi) := f_L[\varphi_{L+1}^{-1}(\xi)] + A_{L+1}(\xi-\xi_{L+1})\,. \tag{III.57}$$

Mit

$$f_{L+1}(q) \;:=\; f_L[q] \;+\; \chi_{L+1}(q) \cdot A_{L+1}[\varphi_{L+1}(q) - \xi_{L+1}] \tag{III.58}$$

ist dann $f_{L+1} = \tilde{f}_{L+1} \circ \varphi_{L+1}$ auf $\overline{V'_{L+1}}$ und deshalb

$$\mathrm{rk}[f_{L+1}] \;=\; m \quad \text{auf} \quad \overline{V'_{L+1}}\,, \tag{III.59}$$

d.h. $f_{L+1} : V'_{L+1} \to \mathbb{R}^n$ ist eine Immersion.
Für alle $q \in M$ ist weiterhin

$$\begin{aligned} \big\| f_{L+1}[q] - f[q] \big\| \;&\leq\; \big\| f_{L+1}[q] - f_L[q] \big\| \;+\; D(q) \Big(\sum_{\ell=1}^{L} 2^{-\ell} \Big) && \text{(III.60)} \\ &\leq 3\, \varepsilon_{L+1}\, \delta_{L+1} \cdot \mathbf{1}\big[q \in \overline{W_{L+1}} \big] \;+\; D(q) \Big(\sum_{\ell=1}^{L} 2^{-\ell} \Big) \;\leq\; D(q) \Big(\sum_{\ell=1}^{L+1} 2^{-\ell} \Big)\,, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, wir wählen

$$\delta_{L+1} \;:=\; \frac{1}{6}\, 2^{-L}\, \varepsilon_{L+1} \min_{q \in \overline{W_{L+1}}} \{ D(q) \} \;>\; 0\,. \tag{III.61}$$

Weiterhin ist für $q \in W_{L+1}$ mit $\xi := \varphi_{L+1}(q) \in B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1})$

$$J^{(f_{L+1})}(q) - J^{(f_L)}(q) \;=\; J^{(f_{L+1} - f_L)}(q) \;=\; J_{\chi_{L+1} \circ \varphi_{L+1}^{-1}} [A_{L+1}(\xi - \xi_{L+1}) \;+\; \chi_{L+1}(q) \cdot A_{L+1} \tag{III.62}$$

und deshalb

$$\big\| J^{(f_{L+1})}(q) - J^{(f_L)}(q) \big\|_{\mathrm{op}} \;\leq\; \max_{\xi \in B(\xi_{L+1}, 3\varepsilon_{L+1})} \Big\{ \big\| J_{\chi_{L+1} \circ \varphi_{L+1}^{-1}}(\xi) \big\|_{\mathrm{op}} \Big\}\, \delta_{L+1}\, \varepsilon_{L+1} \;+\; \delta_{L+1}\,. \tag{III.63}$$

Nach Lemma III.6 kann durch eine genügend kleine Wahl vom $\delta_{L+1} > 0$ also gesichert werden, dass

$$\mathrm{rk}[f_{L+1}] \;=\; m \quad \text{auf} \quad \bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{W_{L+1}}\,. \tag{III.64}$$

Da $\{\chi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq C^\infty(M; [0,1])$ eine lokal endliche Partition der Eins ist, gibt es zu jedem $q \in M$ ein $L_0 \in \mathbb{N}$ und ein $U_q \in \mathfrak{T}(q)$ so, dass

$$\forall\, L \geq L_0\,,\; q' \in U_q : \quad f_L(q') \;=\; f_{L_0}(q')\,. \tag{III.65}$$

Es folgt, dass $g := \lim_{L \to \infty} f_L$ existiert, glatt ist und die gewünschten Eigenschaften $\mathrm{rk}[g] = m$ und $\|f - g\| \leq \psi$ besitzt. $\square$

Wir stellen noch ohne Beweis den folgenden Staz von Whitney vor.

Satz III.8 (Whitney)**.** Ist $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, so gibt es eine Einbettung $f \in C^\infty(M; \mathbb{R}^{2m+1})$ von $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^{2m+1}$, und $f(M) = \overline{f(M)} \subseteq \mathbb{R}^{2m+1}$ ist abgeschlossen.

Bemerkungen und Beispiele.

- Wir verzichten hier auf den Beweis des Whitneyschen Einbettungssatzes, Satz III.8, und geben uns mit Satz III.7 zufrieden. Gleichwohl lässt sich die Hinzunahme einer weiteren Dimension von $2m$ nach $2m+1$ beim Übergang von einer Immersion zu einer Einbettung an Beispielen plausibel machen.
- In den meisten konkreten Anwendungen haben wir es mit *parametrisierten (Hyper-)Flächen* zu tun. Dies sind Mengen der Form
$$M = \bigcup_{k=1}^{K} y_k(V_k) \subseteq \mathbb{R}^d, \tag{III.66}$$
wobei $V_k \subseteq \mathbb{R}^m$ nichtleere offene Mengen (Parameterbereiche) mit $m < d$ und $y_k \in C^\infty(V_k; \mathbb{R}^d)$ injektiv sind.
- Mit $\mathcal{A} = \big\{ \big(y_k(V_k) \, , \, y_k^{-1} \big) \big\}_{k=1}^{K}$ wird $(M, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}, \mathcal{A})$ zur m-dimensionalen, in $\mathbb{R}^d$ immersierten oder sogar eingebetteten Mannigfaltigkeit. Satz III.8 sagt also, dass alle Mannigfaltigkeiten von dieser Form sind - oder wenigstens diffeomorph dazu, vorausgesetzt, wir nehmen $d \geq 2m+1$ an.

IV. Tangential- und Kotangentialraum

IV.1. Tangentialraum

Definition IV.1. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und

$$\widetilde{T}_q[M] \;:=\; \big\{\gamma \in C^1[(a,b);M] \;\big|\; a < 0 < b\,,\; \gamma(0) = q\big\} \tag{IV.1}$$

der Raum aller C^1-Kurven γ in M mit $\gamma(0) = q$. Zwei Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[M]$ heißen **tangential,** $[\gamma] = [\tilde{\gamma}]$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists\,(U,\varphi) \in \mathcal{A}\,,\; U \ni q : \qquad \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \gamma\Big)\Big|_{t=0} \;=\; \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \tilde{\gamma}\Big)\Big|_{t=0}. \tag{IV.2}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Glg. (IV.2) ist kartenunabhängig. Gilt (IV.2) und sind $(U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$, so ist

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big\{\big(\psi \circ \gamma\big)\big|_{t=0} \;-\; \big(\psi \circ \tilde{\gamma}\big)\big|_{t=0}\Big\} \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\Big\{\big[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)\big]\big|_{t=0} \;-\; \big[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tilde{\gamma})\big]\big|_{t=0}\Big\} \\
&\qquad = J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \Big\{\frac{d}{dt}\big(\varphi \circ \gamma\big)\big|_{t=0} \;-\; \frac{d}{dt}\big(\varphi \circ \gamma\big)\big|_{t=0}\Big\} \;=\; 0\,.
\end{aligned} \tag{IV.3}$$

  Daher ist Glg. (IV.2) gleichwertig mit

$$\forall\,(U,\varphi) \in \mathcal{A}\,,\; U \ni q : \qquad \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \gamma\Big)\Big|_{t=0} \;=\; \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \tilde{\gamma}\Big)\Big|_{t=0}. \tag{IV.4}$$

- Die Eigenschaft zweier C^1-Kurven, bei $q \in M$ tangential zu sein, definiert eine Äquivalenzrelation.

Definition IV.2. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $q \in M$.

(i) Die Familie

$$T_q[M] \ := \ \widetilde{T}_q[M]/[\cdot] \ = \ \big\{[\gamma] \ \big| \ \gamma \in \widetilde{T}_q[M]\big\} \tag{IV.5}$$

der Äquivalenzklassen heißt **Tangentialraum an $\boldsymbol{q}$**.

(ii) Ist $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$, so definieren wir

$$\Theta_{C,q} : \ T_q[M] \ \to \ \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \ \mapsto \ \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \gamma\Big)\Big|_{t=0}. \tag{IV.6}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildung $\Theta_{C,q} : T_q[M] \to \mathbb{R}^m$ ist eine Bijektion, denn offensichtlich ist $\Theta_{C,q}$ nach Glg. (IV.4) injektiv. Wählen wir $\varepsilon > 0$ genügend klein und definieren zu $\nu \in \mathbb{R}^m$ eine Kurve $\gamma_\nu \in C^1[(-\varepsilon, \varepsilon); M]$ durch

$$\gamma_\nu(t) \ := \ \varphi^{-1}\big[\varphi(q) + t\nu\big], \tag{IV.7}$$

so ist $\gamma \in \widetilde{T}_q[M]$ und

$$\Theta_{C,q}[\gamma_\nu] \ = \ \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \gamma_\nu\Big)\Big|_{t=0} \ = \ \frac{d}{dt}\big[\varphi(q) + t\nu\big]\Big|_{t=0} \ = \ \nu, \tag{IV.8}$$

und $\Theta_{C,q}$ ist damit auch surjektiv.

Definition IV.3. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren

$$(+) : T_q[M] \times T_q[M] \to T_q[M] \quad \text{und} \quad (\cdot) : \mathbb{R} \times T_q[M] \to T_q[M] \tag{IV.9}$$

durch

$$[\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}] \ := \ \Theta_{C,q}^{-1}\Big(\Theta_{C,q}[\gamma] \ + \ \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\Big). \tag{IV.10}$$

Lemma IV.4. Die Abbildungen $(+)$ und $(\cdot)$ in Definition IV.3 sind wohldefiniert, und $T_q[M]$ ist bezüglich dieser Verknüpfungen ein reeller Vektorraum der Dimension m.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass sich die Vektorraumeigenschaften für $T_q[M]$ leicht aus den entsprechenden Eigenschaften in $\mathbb{R}^m$ ergeben. Beispielsweise erhält man die Kommutativität der Addition aus

$$[\gamma] + [\tilde{\gamma}] \ = \ \Theta_{C,q}^{-1}\big(\Theta_{C,q}[\gamma] + \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\big) \ = \ \Theta_{C,q}^{-1}\big(\Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}] + \Theta_{C,q}[\gamma]\big) \ = \ [\tilde{\gamma}] + [\gamma]. \tag{IV.11}$$

Nicht so offensichtlich ist die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen, d.h. die Kartenunabhängigkeit von (IV.10). Seien dazu $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[M]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $C = (U, \varphi), D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$. Dann ist wegen der Linearität der Ableitung von $\psi \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{aligned}
\Theta_{D,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{D,q}[\tilde{\gamma}] \ &= \frac{d}{dt}\big(\psi \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} + \lambda \cdot \frac{d}{dt}\big(\psi \circ \tilde{\gamma}\big)\Big|_{t=0} \\
&= J_{\psi \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \Big\{\frac{d}{dt}\big(\varphi \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} + \lambda \cdot \frac{d}{dt}\big(\varphi \circ \tilde{\gamma}\big)\Big|_{t=0}\Big\} \\
&= J_{\psi \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \Big(\Theta_{C,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\Big).
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

Ist andererseits $\nu \in \mathbb{R}^m$ und $\gamma_\nu \in \widetilde{T}_q[M]$ wieder durch (IV.7) definiert, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt wird, dass $[\psi(q) + (-\varepsilon, \varepsilon)]\nu \subset \psi(V)$ gilt, so ist nach (IV.8)

$$\Theta_{C,q}^{-1}(\nu) \;=\; [\gamma_\nu] \;=\; \big[\varphi^{-1}\big(\varphi(q) + t\nu\big)\big] \tag{IV.13}$$

und somit

$$\big[\Theta_{D,q} \circ \Theta_{C,q}^{-1}\big](\nu) \;=\; \Theta_{D,q}[\gamma_\nu] \;=\; J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \nu\,, \tag{IV.14}$$

d.h. $\Theta_{D,q} \circ \Theta_{C,q}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ und

$$\Theta_{D,q} \circ \Theta_{C,q}^{-1} \;=\; J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \;=\; \left(\frac{\partial\big(\psi^i[\varphi^{-1}(x)]\big)}{\partial x^j}\bigg|_{x=\varphi(q)} \right)_{i,j=1}^{m}. \tag{IV.15}$$

Insbesondere ist auch

$$\begin{aligned} \Theta_{D,q}^{-1}\Big(\Theta_{D,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{D,q}[\tilde{\gamma}]\Big) \;&=\Theta_{D,q}^{-1}\Big[J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \big(\Theta_{C,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\big)\Big] \\ &= \Theta_{C,q}^{-1}\Big(\Theta_{C,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\Big)\,, \end{aligned} \tag{IV.16}$$

und die in (IV.9)-(IV.10) definierten Verküpfungen sind wohldefiniert. Nach Glg. (IV.10) gilt

$$\Theta_{C,q}\big([\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}]\big) \;=\; \Theta_{C,q}[\gamma] + \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\,, \tag{IV.17}$$

für alle $\gamma, \tilde{\gamma} \in \widetilde{T}_q[M]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\Theta_{C,q} : T_q[M] \to \mathbb{R}^m$ ist ein bijektiver Vektorraumisomorphismus, also ein Isomorphismus. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_{\mathrm{eukl}}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ und $q \in \mathbb{R}^m$ ist $T_q[\mathbb{R}^m] = \mathbb{R}^m$.
- Seien $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und nichtleer und $g \in C^\infty(V;\mathbb{R}^3)$ injektiv, mit

$$\forall\,(r,s) \in V: \quad g(r,s) \;:=\; \begin{pmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \\ z(r,s) \end{pmatrix}. \tag{IV.18}$$

  Dann ist $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}_{\mathrm{rel}}, \{C\})$ mit $M = g(V)$ und $C = (M, g^{-1})$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ist nun $q = g(r_0, s_0) \in M$, so betrachten wir

$$\gamma_1(t) \;:=\; g(r_0 + t, s_0)\,, \quad \gamma_2(t) \;:=\; g(r_0, s_0 + t)\,, \tag{IV.19}$$

  für $|t| < \varepsilon \ll 1$. Offenbar sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \widetilde{T}_q[M]$ und

$$g^{-1} \circ \gamma_1(t) \;:=\; (r_0 + t, s_0)\,, \quad g^{-1} \circ \gamma_2(t) \;:=\; (r_0, s_0 + t)\,, \tag{IV.20}$$

  Also sind

$$\Theta_{C,q}[\gamma_1] \;=\frac{d}{dt}\big(g^{-1} \circ \gamma_1\big)\Big|_{t=0} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{IV.21}$$

$$\Theta_{C,q}[\gamma_2] \;=\frac{d}{dt}\big(g^{-1} \circ \gamma_2\big)\Big|_{t=0} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{IV.22}$$

Definition IV.5. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren durch

$$\mathfrak{T}_{T_q[M]} \ := \ \left\{ \Theta_{C,q}^{-1}(V) \;\middle|\; V \subseteq \mathbb{R}^m \,, \quad V \in \mathfrak{T}_{\text{eukl}} \right\} \tag{IV.23}$$

eine Topologie auf $T_q[M]$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Nach (IV.15) ist für $C = (U, \varphi), D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$ die Abbildung $\Theta_{D,q} \circ \Theta_{C,q}^{-1} = J_{\psi \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)]$ ein Iso- und deshalb auch ein Homöomorphismus. Daher ist (IV.23) kartenunabhängig.
- $(T_q[M], \mathfrak{T}_{T_q[M]})$ und $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{T}_{\text{eukl}})$ sind homöomorph.

Definition IV.6. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten, $q \in M$ und $f \in C^1(M; N)$. Die **Ableitung $\boldsymbol{D_q[f]}$ von $\boldsymbol{f}$ bei $\boldsymbol{q}$** ist definiert als Abbildung

$$D_q[f] : T_q[M] \ \to \ T_{f(q)}[N] \,, \tag{IV.24}$$

$$D_q[f] \ := \Theta_{D,f(q)}^{-1} \circ J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q} \,, \tag{IV.25}$$

wobei $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $D = (V, \psi) \in \mathcal{B}$ mit $U \cap f^{-1}(V) \ni q$.

Lemma IV.7. Die Ableitung $D_q[f]$ von $f \in C^1(M; N)$ bei $q \in M$ ist wohldefiniert, d.h. kartenunabhängig.

Beweis. Seien $C = (U, \varphi), \hat{\phi} = (\widehat{U}, \underline{\hat{x}}) \in \mathcal{A}$ und $D = (V, \psi), \hat{\psi} = (\widehat{V}, \underline{\hat{y}}) \in \mathcal{B}$ Paare von Karten mit $U \cap \widehat{U} \cap f^{-1}(V \cap \widehat{V}) \ni q$. Dann gilt mit (IV.25) und (IV.15)

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_q[f] \ &:= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{\hat{y}} \circ f \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ J_{\underline{\hat{y}} \circ \psi^{-1}}[(\psi \circ f)(q)] \circ J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ J_{\varphi \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{\hat{\psi},f(q)}^{-1} \circ \Theta_{\hat{\psi},f(q)} \circ \Theta_{D,f(q)}^{-1} \circ J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ J_{\varphi \circ \underline{\hat{x}}^{-1}}[\underline{\hat{x}}(q)] \circ \Theta_{C,q} \circ \Theta_{\hat{\phi},q}^{-1} \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \\
&= \Theta_{D,f(q)}^{-1} \circ J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q} \ = \ D_q[f] \,.
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

$\square$

Lemma IV.8. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten, $q \in M$ und $f \in C^1(M; N)$ und $\gamma \in \widetilde{T}_q[M]$. Dann ist

$$D_q[f]\big([\gamma]\big) \ = \ [f \circ \gamma] \,. \tag{IV.27}$$

Beweis. Sind $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $D = (V, \psi) \in \mathcal{B}$ Karten mit $U \cap f^{-1}(V) \ni q$, so ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q}[\gamma] \ &= J_{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)\Big|_{t=0} \ = \ \frac{d}{dt}\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big(\psi \circ f \circ \gamma\big)\Big|_{t=0} \ = \ \Theta_{D,f(q)}[f \circ \gamma] \,.
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

Also ist

$$D_q[f]\big([\gamma]\big) \;=\; \Theta^{-1}_{D,f(q)} \circ J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{\hat{\phi},q}[\gamma] \;=\; [f\circ\gamma]\,. \tag{IV.29}$$

□

Definition IV.9. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq M$ offen und nichtleer.

(i) Wir definieren die Mengen

$$T[M] \;:=\; \bigsqcup_{q\in M} T_q[M] \;:=\; \bigcup_{q\in M} \Big(\{q\}\times T_q[M]\Big)\,, \tag{IV.30}$$

$$T[U] \;:=\; \bigsqcup_{q\in U} T_q[M] \;:=\; \bigcup_{q\in U} \Big(\{q\}\times T_q[M]\Big) \;\subseteq\; T[M]\,. \tag{IV.31}$$

(ii) Ist $C = (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte, so definieren wir für $\gamma \in \widetilde{T}_q[M]$

$$\Theta_C : T[U] \;\to\; \varphi(U)\times\mathbb{R}^m\,, \quad \big(q,[\gamma]\big) \;\mapsto\; \big(\varphi(q), \Theta_{C,q}[\gamma]\big)\,. \tag{IV.32}$$

(iii) Wir definieren auf $T[M]$ eine Topologie durch

$$\mathfrak{T}_{T[M]} \;:=\; \big\{\Theta_C^{-1}(V) \;\big|\; C=(U,\varphi)\in\mathcal{A}\,,\; V\subseteq\varphi(U)\times\mathbb{R}^m \text{ offen}\big\}\,. \tag{IV.33}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Das System $T[M]$ wird in der Literatur auch häufig etwas unpräzise mit $\bigcup_{q\in M} T_q[M]$ bezeichnet. Diese ist jedoch etwas irreführend, da alle Tangentialräume isomorph zu $\mathbb{R}^m$ sind und man sie alle identifizieren könnte. Eine Alternative bietet noch die Bezeichnung

$$T[M] \;=\; \bigsqcup_{q\in M} T_q[M] \;:=\; \Big(T_q[M]\Big)_{q\in M} \tag{IV.34}$$

$$= \Big\{v : M \to \bigcup_{q\in M} T_q[M] \;\Big|\; \forall\, q\in M: \quad v_q \in T_q[M]\Big\}\,.$$

- Das System $\mathfrak{T}_{T[M]} \subseteq \mathfrak{P}\big(T[M]\big)$ ist die kleinste Topologie auf $T[M]$, sodass $\Theta_C : T[U] \to \varphi(U)\times\mathbb{R}^m$ für alle $C=(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ Homöomorphismen sind.

Nachdem wir den Tangentialraum $T[M]$ topologisiert haben, wollen wir ihn auch als Manngifaltigkeit darstellen. Dazu definieren wir verträgliche Karten.

Lemma IV.10. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $C = (U,\varphi), D = (V,\psi) \in \mathcal{A}$ zwei mit $\mathcal{A}$ (und miteinander) verträgliche Karten von M. Dann sind $\big(T[U], \Theta_C\big)$ und $\big(T[V], \Theta_D\big)$ zwei miteinander verträgliche Karten von $T[M]$.

Beweis. Nach der obigen Bemerkung zu (IV.34) sind $\Theta_C : T[U] \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ und $\Theta_D : T[V] \to \varphi(V) \times \mathbb{R}^m$ Homöomorphismen. Zum Nachprüfen der Verträglichkeit können wir o.B.d.A. $W := U \cap V \neq \emptyset$. Nach (IV.15) ist dann

$$\forall\, [\varphi(q), \nu] \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m : \quad \Theta_C^{-1}\big([\varphi(q), \nu]\big) \;=\; \big[q,\ \Theta_{C,q}^{-1}(\nu)\big]\,, \tag{IV.35}$$

woraus wir

$$\begin{aligned} \Big[\Theta_D \circ \Theta_C^{-1}\Big]\big([\varphi(q), \nu]\big) &= \Theta_D\big[q,\ \Theta_{C,q}^{-1}(\nu)\big] \;=\; \Big(\psi(q)\,,\ \big(\Theta_{D,q} \circ \Theta_{C,q}^{-1}\big)[\nu]\Big) \\ &= \Big(\psi(q)\,,\ J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \cdot \nu\Big) \end{aligned} \tag{IV.36}$$

erhalten. Für alle $(\xi, \nu) \in \varphi(W) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist also

$$\Big(\Theta_D \circ \Theta_C^{-1}\Big)[(\xi, \nu)] \;=\; \Big([\psi \circ \varphi^{-1}](\xi)\,,\ J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\xi] \cdot \nu\Big)\,. \tag{IV.37}$$

Mit $(\psi \circ \varphi^{-1}) \in C^\infty[\varphi(W); \psi(W)]$ ist somit auch

$$\Theta_D \circ \Theta_C^{-1} \;\in\; C^\infty\big[\varphi(W) \times \mathbb{R}^m\,;\, \psi(W) \times \mathbb{R}^m\big]\,. \tag{IV.38}$$

□

Unter Berufung auf Lemma IV.10 stellt das System

$$T[\mathcal{A}] \;:=\; \Big\{\big(T[U], \Theta_C\big) \;\Big|\; C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}\Big\} \tag{IV.39}$$

offenbar einen Atlas von $T[M]$ dar, das wir nun als Mannigfaltigkeit definieren.

Definition IV.11. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$. Die Mannigfaltigkeit $T[\mathcal{M}] = \big(T[M], \mathfrak{T}_{T[M]}, T[\mathcal{A}]\big)$ der Dimension $2m$ bezeichnen wir als **Tangentenbündel von $\boldsymbol{\mathcal{M}}$**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\{C = (M, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})\}$ ein Atlas von M. Mit $q \in M$, $v \in \mathbb{R}^m$ und $\gamma(t) := q + tv$ ist

$$\Theta_C(q, [\gamma]) \;=\; \big(q\,,\ \tfrac{d}{dt}\{q + tv\}|_{t=0}\big) \;=\; (q, v)\,. \tag{IV.40}$$

  Somit ist $T[M]$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^m$. Lokal hat das Tangentenbündel stets diese Produktform (innerhalb eines Kartenbereichs). Nicht alle Tangentenbündel sind jedoch auch global von dieser Form.

- Es ist z.B. $T[\mathbb{S}^1]$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, aber $T[\mathbb{S}^2]$ ist nicht diffeomorph zu $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.
- Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ der Dimension m, deren Tangentenbündel $T[\mathcal{M}]$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^m$ ist, nennt man *parallelisierbar*.
- Über Produktkarten sieht man, dass $T[\mathcal{M} \times \mathcal{N}] = T[\mathcal{M}] \times T[\mathcal{N}]$ gilt.

IV.2. Kotangentialraum

Parallel zur Konstruktion des Tangentialraums und des Tangentenbündels läuft die des Kotangentialraums und des Kotangentenbündels einer Mannigfaltigkeit.

Definition IV.12. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und

$$\widetilde{T}_q^*[M] \;:=\; \bigcup_{U \in \mathfrak{T}(q)} C^1(U; \mathbb{R})\,. \tag{IV.41}$$

Zwei reelle Funktionen $f, \tilde{f} \in \widetilde{T}_q^*[M]$ heißen **kotangential bei $\boldsymbol{q}$, $[\boldsymbol{f}]^* = [\tilde{\boldsymbol{f}}]^*$**

$$:\Leftrightarrow \qquad \exists\,(U, \varphi) \in \mathcal{A},\; U \ni q: \quad J_{f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \;=\; J_{\tilde{f} \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)]\,. \tag{IV.42}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Wie Glg. (IV.2) ist auch Glg. (IV.42) kartenunabhängig und gleichwertig mit

$$\forall\,(U, \varphi) \in \mathcal{A},\; U \ni q: \quad J_{f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \;=\; J_{\tilde{f} \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)]\,. \tag{IV.43}$$

- Die Eigenschaft zweier Funktionen $f, \tilde{f} \in \widetilde{T}_q^*[M]$, kotangential bei $q \in M$ zu sein, ist eine Äquivalenzrelation.

Definition IV.13. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $q \in M$.

(i) Die Menge

$$T_q^*[M] \;:=\; \widetilde{T}_q^*[M]/[\cdot]^* \;=\; \big\{ [f]^* \;\big|\; f \in \widetilde{T}_q^*[M] \big\} \tag{IV.44}$$

der Äquivalenzklassen heißt **Kotangentialraum bei $\boldsymbol{q}$**.

(ii) Ist $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$, so definieren wir

$$\Theta_{C,q}^* : \; T_q^*[M] \;\to\; \mathbb{R}^m\,, \quad [f]^* \;\mapsto\; J_{f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)]\,. \tag{IV.45}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Abbildung $\Theta_{C,q}^*$ ist offensichtlich injektiv definiert. Sind nun $\mu \in \mathbb{Z}_1^m$ und $\varphi^\mu \in C^\infty(U : \mathbb{R})$ die μ. Koordinate von $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$, so ist $\varphi^\mu \in \widetilde{T}_q^*[M]$, und mit $\varphi(q) = x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ ist

$$\begin{aligned} \Theta_{C,q}^*[\varphi^\mu]^* \;&=\; J_{\varphi^\mu \circ \varphi^{-1}}[x(q)] \;=\; \left(\frac{\partial(\varphi^\mu \circ \varphi^{-1})[x]}{\partial x^1}\bigg|_{x=x(q)}, \ldots, \frac{\partial(\varphi^\mu \circ \varphi^{-1})[x]}{\partial x^m}\bigg|_{x=x(q)} \right) \\ &=\; \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^1}\bigg|_{x=x(q)}, \ldots, \frac{\partial x^\mu}{\partial x^m}\bigg|_{x=x(q)} \right) \;=\; e^\mu\,, \end{aligned} \tag{IV.46}$$

wobei e^μ den kanonischen Basisvektor in die μ. Koordinatenrichtung notiert. Setzen wir zu $v = (v^1, \ldots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ auch

$$f_w := w^1 \cdot \varphi^1 + w^2 \cdot \varphi^2 + \ldots + w^m \cdot \varphi^m \,, \tag{IV.47}$$

so ist nach (IV.46)

$$\Theta^*_{C,q}[f_w]^* \;=\; \sum_{\mu=1}^{m} w^\mu \cdot \varphi^\mu \;=\; w \,, \tag{IV.48}$$

und $\Theta^*_{C,q}$ ist auch surjektiv, also bijektiv.

Definition IV.14. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Wir definieren

$$(+) : T^*_q[M] \times T^*_q[M] \to T^*_q[M] \quad \text{und} \quad (\cdot) : \mathbb{R} \times T^*_q[M] \to T^*_q[M] \tag{IV.49}$$

durch

$$[\gamma] + \lambda \cdot [\tilde{\gamma}] \;:=\; \Theta^{-1}_{C,q}\Big(\Theta_{C,q}[\gamma] \;+\; \lambda \cdot \Theta_{C,q}[\tilde{\gamma}]\Big) \,. \tag{IV.50}$$

Lemma IV.15. Die Abbildungen $(+)$ und $(\cdot)$ in Definition IV.14 sind wohldefiniert, und $T^*_q[M]$ ist bezüglich dieser Verknüpfungen ein reeller Vektorraum der Dimension m.

Wir verzichten auf den Beweis von Lemma IV.15, leiten aber die (IV.15) entsprechende Identität her. Seien $C = (U, \varphi), D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$. Aus (IV.47)-(IV.48) erhalten wir, dass für alle $w \in \mathbb{R}^m$

$$(\Theta^*_{C,q})^{-1}[w] \;=\; [f_w]^* \;=\; \Big[\sum_{\mu=1}^{m} w^\mu \cdot \varphi^\mu\Big]^* . \tag{IV.51}$$

Für $\mu \in \mathbb{Z}_1^m$ ist also

$$\begin{aligned} \Big(\Theta^*_{D,q} \circ (\Theta^*_{C,q})^{-1}[w]\Big)_\mu \;&=\; \big(\Theta^*_{D,q}[f_w]^*\big)_\mu \;=\; \big(J_{f_w \circ \psi^{-1}}[\psi(q)]\big)_\mu \\ &=\; \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\Big[\sum_{\tau=1}^{m} w_\tau\, \varphi^\tau[\psi^{-1}(\xi)]\Big]\Big|_{\xi=\psi(q)}\right)_\mu \;=\; \sum_{\tau=1}^{m} w_\tau \,\big(J_{\varphi\circ\psi^{-1}}[\psi(q)]\big)_{\tau,\mu} \,, \end{aligned} \tag{IV.52}$$

was gleichwertig ist mit

$$\Theta^*_{D,q} \circ (\Theta^*_{C,q})^{-1} \;=\; J^T_{\varphi\circ\psi^{-1}}[\psi(q)] \;=\; \left(\frac{\partial\big(\varphi^j[\psi^{-1}(y)]\big)}{\partial y^i}\bigg|_{y=\psi(q)}\right)_{i,j=1}^{m} , \tag{IV.53}$$

wobei A^T die zu A transponierte Matrix ist.

Definition IV.16. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq M$ offen und nichtleer.

(i) Wir definieren die Mengen

$$T^*[M] \;:=\; \bigsqcup_{q \in M} T_q^*[M] \;:=\; \bigcup_{q \in M} \Big(\{q\} \times T_q^*[M] \Big) , \tag{IV.54}$$

$$T[U] \;:=\; \bigsqcup_{q \in U} T_q^*[M] \;:=\; \bigcup_{q \in U} \Big(\{q\} \times T_q[M] \Big) \;\subseteq\; T[M] . \tag{IV.55}$$

(ii) Ist $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte, so definieren wir für $f \in \widetilde{T}_q^*[M]$

$$\Theta_C : T^*[U] \;\to\; \varphi(U) \times \mathbb{R}^m , \quad \big(q, [f]^*\big) \;\mapsto\; \big(\varphi(q), \Theta_{C,q}[f]^*\big) . \tag{IV.56}$$

(iii) Wir definieren auf $T^*[M]$ eine Topologie durch

$$\mathfrak{T}_{T^*[M]} \;:=\; \Big\{ \big(\Theta_C^*\big)^{-1}(V) \;\Big|\; C = (U, \varphi) \in \mathcal{A} ,\; V \subseteq \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \text{ offen} \Big\} . \tag{IV.57}$$

Lemma IV.17. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $C = (U, \varphi), D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ zwei miteinander verträgliche Karten von M. Dann sind $\big(T^*[U], \Theta_C^*\big)$ und $\big(T^*[V], \Theta_D^*\big)$ zwei miteinander verträgliche Karten von $T^*[M]$.

Definition IV.18. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$. Die Mannigfaltigkeit $T^*[\mathcal{M}] = \big(T^*[M], \mathfrak{T}_{T^*[M]}, T^*[\mathcal{A}]\big)$ der Dimension $2m$ bezeichnen wir als **Kotangentenbündel von $\mathcal{M}$**, wobei

$$T^*[\mathcal{A}] \;:=\; \Big\{ \big(T^*[U], \Theta_C^*\big) \;\Big|\; C = (U, \varphi) \;\in\; \mathcal{A} \Big\} . \tag{IV.58}$$

IV.3. Der Dualraum eines reellen Vektorraums

Wir erinnern als Nächstes an den Begriff des Dualraums eines reellen Vektorraums, wobei wir den komplexen Fall nur deswegen nicht behandeln, weil er in dieser Vorlesung keine Rolle spielt (und nicht, weil dieser Fall wäre). Wir nehmen im Weiteren an, dass $\big(E, \|\cdot\|\big)$ ein reeller Banachraum ist, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die nun eingeführten Begriffe lassen sich auch für allgemeine topologischer Vektorräume einführen, worauf wir jedoch verzichten.

Ist $\big(E, \|\cdot\|\big)$ ein reeller Banachraum, so nennen wir

$$E^* \;:=\; \mathcal{B}(E; \mathbb{R}) \;=\; \big\{ x^* : E \to \mathbb{R} \;\big|\; x^* \text{ ist linear und stetig} \big\} \tag{IV.59}$$

den **(topologischen) Dualraum von E**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Es ist üblich, für $x^* \in E^*$ und $x \in E$

$$x^*(x) \;=:\; \langle x^* , x \rangle \tag{IV.60}$$

zu schreiben.

- Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die Forderung der Stetigkeit an $x^* \in E^*$ obsolet, denn in diesem Fall sind alle linearen Abbildungen stetig.
- Da E ein normierter Raum ist, ist E^* als Raum der beschränkten linearen Operatoren von E nach $\mathbb{R}$ selbst ein Banachraum mit Norm
$$\|x^*\|_{E^*} \; = \; \sup\Big\{ \big|\langle x^*, x\rangle\big| : \; x \in E\,, \; \|x\| \leq 1 \Big\}\,. \tag{IV.61}$$
- Sind E und F zwei reelle Banachräume und $L \in \mathcal{B}(E;F)$, so wird für festes $y^* \in F^*$ durch $x \mapsto \langle x^*, Lx\rangle$ eine stetige lineare Abbildung $E \to \mathbb{R}$ definiert. Diese bezeichnet man als **zu L transponierte Abbildung $L^T : F^* \to E^*$**, sodass
$$\forall\, y^* \in F^*, \; x \in E: \quad \langle L^T y^*\,,\, x\rangle \; = \; \langle y^*\,,\, Lx\rangle\,. \tag{IV.62}$$
- Sind weiterhin $\dim(E) = m \in \mathbb{N}$ und $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq E$ eine Basis, so ist auch $\dim(E^*) = m$, und es existiert eine eindeutige Basis $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ so, dass
$$\forall\, i, j \in \mathbb{Z}_1^m: \quad \langle e_i^*, e_j\rangle \; = \; \delta_{i,j}\,. \tag{IV.63}$$
Dies ist leicht einzusehen:
  - Jeder Vektor $x \in E$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$. Wir definieren $e_i^* \in E^*$ durch $\langle e_i^*, x\rangle := \alpha_i$, für $i \in \mathbb{Z}_1^m$. Dann ist e_i^* offensichtlich linear, und $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ erfüllt (IV.63).
  - Ist $\beta_1 e_1^* + \ldots + \beta_m e_m^* = 0$, so folgt aus (IV.63) für jedes $j \in \mathbb{Z}_1^m$, dass $0 = \langle \beta_1 e_1^* + \ldots + \beta_m e_m^*\,,\, e_j\rangle = \beta_j$, und $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subseteq E^*$ ist linear unabhängig.
  - Schließlich ist $\ell^* \in E^*$ eindeutig bestimmt durch die Bilder $\gamma_1 := \langle \ell^*, e_1\rangle, \ldots, \gamma_m := \langle \ell^*, e_m\rangle$ der Basisvektoren $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*$, und wir erhalten $\ell^* = \gamma_1 e_1^* + \ldots + \gamma_m e_m^* \in \mathrm{span}\big[\{e_1^*, \ldots, e_m^*\}\big]$.
- Schließlich bemerken wir, dass ein Basiswechsel $L \in \mathcal{B}(E;E)$, $\det[L] \neq 0$, den Basiswechsel $(L^{-1})^T \in \mathcal{B}(E^*;E^*)$ in E^* induziert.
  - Sind nämlich $\hat{e}_1 = Le_1, \ldots, \hat{e}_m = Le_m$ und $\{\hat{e}_1^*, \ldots, \hat{e}_m^*\} \subseteq E^*$ die Basis mit $\langle \hat{e}_i^*, \hat{e}_j\rangle = \delta_{i,j}$, so gilt
$$\delta_{i,j} \; = \; \langle \hat{e}_i^*, \hat{e}_j\rangle \; = \; \langle \hat{e}_i^*, Le_j\rangle \; = \; \langle L^T \hat{e}_i^*, e_j\rangle\,, \tag{IV.64}$$
für alle $i, j \in \mathbb{Z}_1^m$.
  - Daraus folgt, dass $L^T \hat{e}_i^* = e_i$ bzw. $\hat{e}_i^* = (L^T)^{-1} e_i = (L^{-1})^T e_i$.
- Für $\big(E, \|\cdot\|\big) = \big(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{\mathrm{eukl}}\big)$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ sind $(\mathbb{R}^m)^* = \mathbb{R}^m$ und $\langle e_i^*, \cdot\rangle = \langle e_i|\cdot\rangle_{\mathrm{eukl}}$.

Definition IV.19. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$, $q \in M$ und $C = (U, x) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$. Sei weiterhin $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ die Standardbasis. Für $i, j \in \mathbb{Z}_1^m$ setzen wir
$$\frac{\partial}{\partial x^j} \; := \; \frac{\partial}{\partial x^j(q)} \; := \Theta_{C,q}^{-1}(e_j) \; \in \; T_q[M]\,, \tag{IV.65}$$
$$dx^i \; := \; dx^i(q) \; := (\Theta_{C,q}^*)^{-1}(e_i) \; \in \; T_q^*[M]\,. \tag{IV.66}$$

Lemma IV.20.

(i) Die Teilmengen $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\} \subseteq T_q[M]$ und $\left\{dx^1, \ldots, dx^m\right\} \subseteq T_q^*[M]$ sind Basen.

(ii) Für $f \in \widetilde{T}_q^*[M]$ und $\gamma \in \widetilde{T}_q[M]$ sei

$$\big\langle [f]^* \,,\, [\gamma] \big\rangle \ := \ \Big\langle \Theta_{C,q}^*[f]^* \,\Big|\, \Theta_{C,q}[\gamma] \Big\rangle_{\text{eukl}} . \tag{IV.67}$$

Dann ist

$$\big(T_q[M]\big)^* \ = \ T_q[M]^* , \tag{IV.68}$$

und es gilt

$$\forall\, i,j \in \mathbb{Z}_1^m : \qquad \Big\langle dx^i \,,\, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big\rangle \ = \ \delta_{i,j} . \tag{IV.69}$$

Beweis. (i): folgt sofort aus der Tatsache, dass $\Theta_{C,q} : T_q[M] \to \mathbb{R}^m$ und $\Theta_{C,q}^* : T_q[M]^* \to \mathbb{R}^m$ Isomorphismen sind.

(ii): Die Linearität von $\Theta_{C,q}$ und $\Theta_{C,q}^*$ sowie die Bilinearität des euklidschen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^m$ sichern, dass (IV.67) ein lineares Funktional auf $T_q[M]$ definiert, d.h. es gelten $[f]^* \in \big(T_q[M]\big)^*$ und deshalb auch $T_q[M]^* \subseteq \big(T_q[M]\big)^*$. Da beide Vektorräume Dimension m haben, müssen sie gleich sein, und es folgt (IV.68).

Glg. (IV.69) ergibt sich aus

$$\Big\langle dx^i \,,\, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big\rangle \ = \Big\langle (\Theta_{C,q}^*)^{-1}(e_i) \,,\, \Theta_{C,q}^{-1}(e_j) \Big\rangle \ = \ \langle e_i | e_j \rangle_{\text{eukl}} \ = \ \delta_{i,j} . \tag{IV.70}$$

□

Bemerkungen und Beispiele.

- Mit $f \in \widetilde{T}_q^*[M]$, $\gamma \in \widetilde{T}_q[M]$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$ ist

$$\begin{aligned}
\big\langle [f]^* \,,\, [\gamma] \big\rangle \ &= \Big\langle \Theta_{C,q}^*[f]^* \,\Big|\, \Theta_{C,q}[\gamma] \Big\rangle_{\text{eukl}} \ = \ \Big\langle J_{f\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \,\Big|\, \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)\big|_{t=0} \Big\rangle_{\text{eukl}} \\
&= \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})[\xi]}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi=\varphi(q)} \frac{d}{dt}(\varphi^\mu \circ \gamma)\big|_{t=0} \Big\rangle_{\text{eukl}} \ = \ \frac{d}{dt}\Big(f \circ \gamma \Big)\Big|_{t=0} ,
\end{aligned} \tag{IV.71}$$

  nach der Kettenregel. In (IV.71) ist die Kartenunabhängigkeit manifest.

- Sind $C = (U, \varphi), D = (V, \psi) \in \mathcal{A}$ mit $q \in U \cap V$, so ist, für alle $j \in \mathbb{Z}_1^m$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi^j} \ &= \Theta_{D,q}^{-1}[e_j] \ = \ \Theta_{C,q}^{-1} \circ \big(\Theta_{C,q} \circ \Theta_{D,q}^{-1}\big)[e_j] \ = \ \Theta_{C,q}^{-1}\big(J_{\varphi\circ\psi^{-1}}[\psi(q)]\big)[e_j] \\
&= \sum_{i=1}^m \big(J_{\varphi\circ\psi^{-1}}[\psi(q)]\big)_{j,i}\, \Theta_{C,q}^{-1}[e_i] \ = \ \sum_{i=1}^m \frac{\partial\big(\varphi^i[\psi^{-1}(y)]\big)}{\partial y^j}\Big|_{y=\psi(q)} \frac{\partial}{\partial x^i} .
\end{aligned} \tag{IV.72}$$

- Genauso erhalten wir

$$dy^i(q) = \big(\Theta^*_{D,q}\big)^{-1}[e_i] = \big(\Theta^*_{C,q}\big)^{-1} \circ \Big[\Theta^*_{C,q} \circ \big(\Theta^*_{D,q}\big)^{-1}\Big][e_i] = \big(\Theta^*_{C,q}\big)^{-1} \circ \big(J_{\psi\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)]\big)[e_i]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\big(\psi^i[\varphi^{-1})(x)]\big)}{\partial x^j}\Big|_{x=\varphi(q)} dx^j(q)\,. \tag{IV.73}$$

- Die Definitionen der Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^j(q)} \in T_q[M]$ und $dx^i(q) \in T_q^*[M]$ stellen also gleichzeitig eine Merkregel für ihre Transformation unter Kartenwechsel dar.

V. Vektorfelder und Lie-Ableitung

V.1. Vektorfelder und Vektorbündel

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass das Tangentenbündel $T[\mathcal{M}]$ -ebenso wie das Kotangentenbündel $T^*[\mathcal{M}]$- eine Mannigfaltigkeit bildet; dabei sind der Ausgangspunkt die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und

$$T[M] \ = \ \bigcup_{q \in M} \{q\} \times T_q[M] \quad \text{und} \quad T^*[M] \ = \ \bigcup_{q \in M} \{q\} \times T_q^*[M] \,. \tag{V.1}$$

Sei nun $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte von M. Für jeden Punkt $q \in U$ ist $\gamma_q \in \widetilde{T}_q[M]$ mit $\gamma_q(t) = q$ (konstante Funktion) und $\Theta_{C,q}[\gamma_q] = 0$, d.h. $[\gamma_q] = 0 \in T_q[M]$. Wir setzen

$$\widehat{M} \ := \ \Big\{ \big(q, [\gamma_q]\big) \ \Big| \ q \in M \Big\} \ \subseteq \ T[M] \,. \tag{V.2}$$

Dann ist

$$\widehat{M} \cup T[U] \ = \ \Big\{ \big(q, [\gamma]\big) \ \Big| \ \Theta_C\big(q, [\gamma]\big) = (q, 0) \Big\} \,, \tag{V.3}$$

und $\widehat{M}$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $T[M]$. Außerdem ist $M \ni q \mapsto (q, [\gamma_q]) \in \widehat{M}$ ein Diffeomorphismus. Daher ist $\mathcal{M}$ (diffeomorph zu) eine Teilmannigfaltigkeit von $T[\mathcal{M}]$.

Wir identifizieren $\widehat{M}$ und $\mathcal{M}$ und erhalten die **Projektion**

$$\pi : \ T[M] \to M \,, \quad \big(q, [\gamma]\big) \mapsto q \,. \tag{V.4}$$

Definition V.1. Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ der Dimension $m \in \mathbb{N}$ heißt **parallelisierbar**

$$:\Leftrightarrow \qquad T[\mathcal{M}] \text{ ist diffeomorph zu } M \times \mathbb{R}^m. \tag{V.5}$$

Definition V.2. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, $N \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit, $\pi : M \to N$ eine Surjektion und F ein reeller Vektorraum.

(i) $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A}, N, \pi, F)$ heißt **Vektorbündel** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, q \in N \; \exists U \in \mathfrak{T}[q] : \quad \pi^{-1}(U \cup N) \text{ ist diffeomorph zu } (U \cup N) \times \mathbb{R}^m. \tag{V.6}$$

In diesem Fall nennt man N die **Basis** und $\pi^{-1}(\{q\})$ die **Faser**.

(ii) Ist $\mathcal{M}$ diffeomorph zu $N \times F$, so heißt das Vektorbündel $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A}, N, \pi, F)$ **trivialisierbar**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $M = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$, $\pi(x, y) := x \in \mathbb{R}^m$, für $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Offenbar ist $M = N \times F$ trivialisierbar.
- Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, $F = \mathbb{R}^m$ und $\pi : T[M] \to M$, $\pi(q, v) = q$. Dann ist das Tangentenbündel $T[\mathcal{M}]$ ein Vektorbündel $\big(T[M], \mathfrak{T}_{T[M]}, T[\mathcal{A}], M, \pi, \mathbb{R}^m\big)$ mit Basis M und Faser $\pi^{-1}(\{q\}) = T_q[M]$. Offensichtlich gilt

$$\big(T[M], \mathfrak{T}_{T[M]}, T[\mathcal{A}], M, \pi, \mathbb{R}^m\big) \text{ ist trivialisierbar} \quad \Leftrightarrow \quad T[\mathcal{M}] \text{ ist parallelisierbar.} \tag{V.7}$$

- Seien $U_1 = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, $U_2 = \big([0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)\big) \times (-1, 1)$ und

$$\varphi_1(\alpha, x) := (\alpha, x)\,, \tag{V.8}$$

$$\varphi_2(\alpha, x) := \begin{cases} (\alpha, x)\,, & \text{falls } \alpha \in [0, \pi), \\ (\alpha - 2\pi, -x)\,, & \text{falls } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{V.9}$$

Die Mannigfaltigkeit $M = U_1 \cup U_2$ mit Atlas $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1)\,, (U_1, \varphi_1)\}$ heißt *Möbiusband.* Sie ist nicht trivialisierbar, denn sie ist nicht orientierbar - ein Begriff, den wir später noch kennenlernen werden.

Definition V.3. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit.

(i) Eine Abbildung $X \in C^\infty\big(M; T[M]\big)$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ heißt **(glattes) Vektorfeld (auf M)**. Die Menge der glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $T_1^0[M]$.

(ii) Eine Abbildung $\omega \in C^\infty\big(M; T^*[M]\big)$ mit $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$ heißt **(glattes) Differenzialform (auf M)**. Die Menge der glatten Differenzialformen auf M bezeichnen wir mit $T_0^1[M]$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Die Bedingung $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ stellt sicher, dass Vektorfelder $X \in T_1^0[M]$ Abbildungen der Form $X(q) = (\hat{q}, v_q)$ mit $\hat{q} = q$ und daher $v_q \in T_{\hat{q}}[M] = T_q[M]$ sind. Es ist deshalb üblich (und ungefährlich), den ersten Teil q des Bildes (q, v_q) wegzulassen und $X(q)$ mit v zu identifizieren, d.h. man nimmt o.B.d.A. an, dass $X(q) \in T_q[M]$.
- Analog nimmt man für eine Differenzialform $\omega \in T_0^1[M]$ an, dass $\omega(q) \in T_q^*[M]$ liegt, da auch hier $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$ sichert, dass $\omega(q)$ im zu q gehörigen Kotangentialraum liegt.

Satz V.4. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

$$
\begin{aligned}
& T[\mathcal{M}] \text{ ist parallelisierbar} && \text{(V.10)} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, X_1, X_2, \ldots, X_m \in T_1^0[M] : \quad X_1, X_2, \ldots, X_m \text{ sind linear unabhängig} && \text{(V.11)} \\
:\Leftrightarrow \quad & \exists\, X_1, X_2, \ldots, X_m \in T_1^0[M] ,\ \forall\, q \in M : \\
& \qquad \{X_1(q), X_2(q), \ldots, X_m(q)\} \ \subseteq\ T_q[M] \text{ ist linear unabhängig.}
\end{aligned}
$$

Beweis. – **muss noch eingegeben werden** – □

Definition V.5. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit und $X \in T_1^0[M]$ ein Vektorfeld. Die ***X* zugeordnete Lie-Ableitung**

$$
L_X : \ C^\infty(M; \mathbb{R}) \ \to \ C^\infty(M; \mathbb{R}) \tag{V.12}
$$

ist definiert durch

$$
\big[L_X f\big](q) \ := \ D_q[f]\big(X(q)\big) \ = \ J_{f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q}[X(q)] \,, \tag{V.13}
$$

wobei $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ so gewählt ist, dass $U \ni q$.

Bemerkungen und Beispiele.

- Natürlich ist (V.13) kartenunabhängig.
- Aus (V.13) erhalten wir sofort die Linearität von L_X, nämlich

$$
\begin{aligned}
\big[L_X f\big](q) \,+\, \alpha\, \big[L_X g\big](q) \ &= D_q[f]\big(X(q)\big) \,+\, \alpha\, D_q[g]\big(X(q)\big) \ = \ D_q[f + \alpha g]\big(X(q)\big) \\
&= \big[L_X(f + \alpha g)\big](q) \,. \qquad \text{(V.14)}
\end{aligned}
$$

- Wir beobachten weiterhin, dass

$$
\big[(f \cdot g) \circ \varphi^{-1}\big](\xi) \ = \ f[\varphi^{-1}](\xi)] \cdot g[\varphi^{-1}](\xi)] \ = \ \big[f \circ \varphi^{-1}\big](\xi) \cdot \big[g \circ \varphi^{-1}\big](\xi) \tag{V.15}
$$

  und daher die Lie-Ableitung der Leibniz-Regel (Produktregel) genügt,

$$
\begin{aligned}
\big[L_X(f \cdot g)\big](q) \ &= J_{[f \circ \varphi^{-1}] \cdot [g \circ \varphi^{-1}]}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q}[X(q)] \\
&= [f \circ \varphi^{-1}]\big(\varphi(q)\big) \cdot J_{g \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q}[X(q)] \qquad \text{(V.16)} \\
&\quad + \ [g \circ \varphi^{-1}]\big(\varphi(q)\big) \cdot J_{f \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q}[X(q)] \\
&= f(q) \cdot \big[L_X g\big](q) \,+\, g(q) \cdot \big[L_X f\big](q) \,.
\end{aligned}
$$

- Somit gilt für alle $f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$
L_X(f + \alpha g) \ = L_X(f) + \alpha L_x(g) \,, \tag{V.17}
$$

$$
L_X(f \cdot g) \ = L_X(f) \cdot g \,+\, f \cdot L_x(g) \,. \tag{V.18}
$$

- Mit Hilfe von (IV.45) und (IV.71) erkennen wir, dass

$$[L_X f](q) \;=\; J_{f\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \circ \Theta_{C,q}[X(q)] \;=\; \big\langle [f]_q^*\,,\, X(q)\big\rangle\,, \tag{V.19}$$

wobei $\langle\,,\,\rangle : T_q^*[M] \times T_q[M] \to \mathbb{R}$ die Dualitätsklammer bezeichnet.

- Wir erinnern daran, dass $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ gleichwertig mit der Aussage ist, dass $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty\big(\varphi(U);\mathbb{R}\big)$, für jede Karte $C = (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ von M.

- Sind $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\mathcal{A} = \{(M, \mathrm{id}_M)\}$, so stimmt die Definition von $C^\infty(M;\mathbb{R})$ mit der aus der Analysisvorlesung bekannten überein. In diesem Fall ist

$$T_1^0[M] \;=\; \big\{X \in C^\infty(M; M\times\mathbb{R}^m) \;\big|\; \pi\circ X \;=\; \mathrm{id}_M\big\}\,, \tag{V.20}$$

und für $X \in T_1^0[M]$ und $q \in M$ ist $X(q) = \big(X^1(q), X^2(q), \ldots, X^m(q)\big)^T \in \mathbb{R}^m$. (Wir können wieder die erste Komponente q von $X(q)$ ignorieren.)

Ist nun $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$, so ist mit $\varphi = \mathrm{id}_M$ und $q \in M$

$$[f]_q^* \;=\; J_{f\circ\varphi^{-1}}[\varphi(q)] \;=\; \left(\frac{\partial f(q)}{\partial q^1}\,,\, \frac{\partial f(q)}{\partial q^2}\,, \ldots\; \frac{\partial f(q)}{\partial q^m}\right) \tag{V.21}$$

und somit

$$[L_X f](q) \;=\; \big\langle [f]_q^*\,,\, X(q)\big\rangle \;=\; \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f(q)}{\partial q^1}\, X^\mu(q)\,. \tag{V.22}$$

Am Punkt $q \in M$ ist $[L_X f](q)$ also die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $X(q)$.

- Seien $d \geq m{+}1$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $h \in C^\infty(U;\mathbb{R}^d)$ eine Einbettung von $M := h(U) \subseteq \mathbb{R}^d$, d.h. h ist injektiv und $\mathrm{rk}[J_h] = m$ auf U. Außerdem sind $\{H = (M, h^{-1})\}$ ein Atlas und

$$T_1^0[M] \;=\; C^\infty\big(M; T[M]\big)\,, \tag{V.23}$$

da M parallelisierbar mit Diffeomorphismus $\Theta_H : T[M] \to M \times \mathbb{R}^m$ ist. Beachte, dass

$$M \;=\; \Big\{\big(h^1(\xi), \ldots, h^d(\xi)\big)^T \;\Big|\; \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)^T \;\in\; U\Big\}\,. \tag{V.24}$$

Sind $q = h(\xi) \in M$ und $\gamma_\nu(t) := h(\xi + te^\nu)$, für $\nu \in \mathbb{Z}_1^m$, so ist $\gamma_\nu \in \widetilde{T}_q[M]$ und

$$\Theta_{H,q}[\gamma_\nu] \;=\; \frac{d}{dt}\Big(h^{-1}\circ\gamma_\nu\Big)\Big|_{t=0} \;=\; e^\nu\,. \tag{V.25}$$

Ist weiterhin $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, so erhalten wir $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ durch Restriktion von f aus M (die wir mit demselben Buchstaben bezeichnen). Für $X \in T_1^0[M]$ mit $\Theta_{H,q}[X(q)] = \big(v_q^1, \ldots, v_q^m\big)^T \in \mathbb{R}^m$ ist dann

$$[L_X f](q) \;=\; \big\langle J_{f\circ h}(\xi) \,\big|\, v_q\big\rangle_{\mathrm{eukl}} \;=\; \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial[f\circ h](\xi)}{\partial \xi^\nu}\cdot v_q^\nu\,. \tag{V.26}$$

- Sind $(f_n)_{n=1}^\infty \in C^\infty(M;\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ und $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$, so heißt **$(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergent gegen f, $f_n \to f$**

$$:\Leftrightarrow \qquad \forall\, q \in M,\ C = (U,\varphi) \in \mathcal{A},\ U \ni q,\ \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m : \qquad \lim_{n\to\infty} \Big\{ \partial_\xi^\alpha \big[f_n \circ \varphi^{-1}\big]\big(\varphi(q)\big) \Big\} \ = \ \partial_\xi^\alpha \big[f \circ \varphi^{-1}\big]\big(\varphi(q)\big)\,, \tag{V.27}$$

wobei $\partial_\xi^\alpha := \frac{\partial^{\alpha^1}}{\partial(\xi^1)^{\alpha^1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha^m}}{\partial(\xi^m)^{\alpha^m}}$ mit $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$ die übliche Multiindexnotation ist.

- Eine Abbildung $L : C^\infty(M;\mathbb{R}) \to C^\infty(M;\mathbb{R})$ heißt **stetig** $:\Leftrightarrow$

$$\forall\,(f_n)_{n=1}^\infty \in C^\infty(M;\mathbb{R})^{\mathbb{N}},\ f_n \to f \in C^\infty(M;\mathbb{R}) : \quad L(f_n) \to L(f)\,. \tag{V.28}$$

- Sind $X \in T_1^0[M]$ ein Vektorefeld, $q \in M$ und $C = (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$, so beobachten wir, dass mit $X(q) = \sum_{\nu=1}^m x^\nu(q) \frac{\partial}{\partial\varphi^\nu(q)}$ auch

$$\Theta_{C,q}[X(q)] \ = \ \sum_{\nu=1}^m x^\nu(q)\, \Theta_{C,q}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi^\nu(q)}\right] \ = \ \big(x^1(q), \ldots, x^m(q)\big)^T . \tag{V.29}$$

Mit $(f_n)_{n=1}^\infty \in C^\infty(M;\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ und $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ so, dass $f_n \to f$, ist für $q \in M$ also

$$\big[(L_X f_n) \circ \varphi^{-1}\big](\xi) \ = \ \sum_{\nu=1}^m x^\nu\big(\varphi^{-1}(\xi)\big)\, \frac{\partial[f_n \circ \varphi^{-1}](\xi)}{\partial\xi^\nu}\,, \tag{V.30}$$

$$\big[(L_X f) \circ \varphi^{-1}\big](\xi) \ = \ \sum_{\nu=1}^m x^\nu\big(\varphi^{-1}(\xi)\big)\, \frac{\partial[f \circ \varphi^{-1}](\xi)}{\partial\xi^\nu}\,. \tag{V.31}$$

Da $\xi \mapsto x^\nu\big(\varphi^{-1}(\xi)\big)$ glatt ist, folgt sofort, dass $(L_X f_n) \to (L_X f)$. Also ist

$$L_X :\ C^\infty(M;\mathbb{R}) \ \to \ C^\infty(M;\mathbb{R}) \quad \text{stetig.} \tag{V.32}$$

Satz V.6. Seien $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit und $L : C^\infty(M;\mathbb{R}) \to C^\infty(M;\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung, die linear ist und die Leibniz-Regel erfüllt, d.h. für die

$$L(f + \alpha g) \ = L(f) + \alpha L(g)\,, \tag{V.33}$$

$$L(f \cdot g) \ = L(f) \cdot g \, + \, f \cdot L(g) \tag{V.34}$$

für alle $f, g \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Dann existiert genau ein Vektorfeld $X \in T_1^0[M]$ so, dass $L = L_X$ die zugehörige Lie-Ableitung ist.

Beweis. Wir definieren

$$\mathcal{L} \ := \ \Big\{ L : C^\infty(M;\mathbb{R}) \to C^\infty(M;\mathbb{R}) \ \Big|\ L \text{ ist stetig ud erfüllt (V.33) und (V.34)} \Big\}. \tag{V.35}$$

Ist $X \in T_1^0[M]$ ein Vektorfeld, so besitzt die Lie-Ableitung L_X gemäß (V.17), (V.18) und (V.32) die geforderten Eigenschaften und daher ist $L_X \in \mathcal{L}$, d.h.

$$L_{(\cdot)} :\ T_1^0[M] \ \to \ \mathcal{L}\,, \quad X \mapsto L_X \tag{V.36}$$

definiert eine Abbildung, deren Bijektivität behauptet wird.

Injektivität: Seien $X, Y \in T_1^0[M]$ und $L_X = L_Y$. Sind $q \in M$, $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$ und

$$X(q) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} x_q^\nu \frac{\partial}{\partial \varphi^\nu(q)} \quad \text{und} \quad Y(q) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} y_q^\nu \frac{\partial}{\partial \varphi^\nu(q)}\,, \tag{V.37}$$

so ist mit $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, $\mathrm{supp}[f] \subseteq U$ und $f \equiv \varphi^\mu$ in einer Umgebung von q,

$$[L_X f](q) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} x_q^\nu \frac{\partial [f \circ \varphi^{-1}](\xi)}{\partial \xi^\nu}\bigg|_{\xi=\varphi(q)} \;=\; x_q^\mu \quad \text{und} \quad [L_Y f](q) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} y_q^\nu \frac{\partial [f \circ \varphi^{-1}](\xi)}{\partial \xi^\nu}\bigg|_{\xi=\varphi(q)} \;=\; y_q^\mu\,. \tag{V.38}$$

Somit ist $x_q^\mu = y_q^\mu$, für alle $q \in M$ und alle $\mu \in \mathbb{Z}_1^m$, d.h.

$$X \;=\; Y\,. \tag{V.39}$$

Surjektivität: Sei $L \in \mathcal{L}$. Wir setzen $\mathbf{1} \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, $q \mapsto 1$, d.h. $\mathbf{1}$ ist identisch gleich eins auf M. Aus der Linearität von L und der Leibniz-Regel erhalten wir zunächst

$$L(\mathbf{1}) \;=\; L(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) \;=\; L(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \,+\, \mathbf{1} \cdot L(\mathbf{1}) \;=\; 2\,L(\mathbf{1}) \tag{V.40}$$

und deshalb $L(\mathbf{1}) = 0$ und somit auch

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}: \qquad L(\alpha\, \mathbf{1}) \;=\; 0\,. \tag{V.41}$$

Seien nun $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$, $q_0 \in M$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q_0$. Mit $\xi_0 = \varphi(q_0)$ ist dann für alle $\xi \in B(\xi_0, \varepsilon)$ und $\varepsilon > 0$ genügend klein nach Taylor

$$\begin{aligned}[f \circ \varphi^{-1}](\xi) \;&=\; [f \circ \varphi^{-1}](\xi_0) \,+\, \sum_{\nu=1}^{m} (\xi^\nu - \xi_0^\nu)\, \frac{\partial [f \circ \varphi^{-1}](\xi_0)}{\partial \xi^\nu} \\ &\qquad + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} (\xi^\mu - \xi_0^\mu)\,(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\, F_{\mu,\nu}[\xi; \xi_0]\,,\end{aligned} \tag{V.42}$$

wobei

$$F_{\mu,\nu}[\xi; \xi_0] \;:=\; \int_0^1 (1-t) \left\{ \frac{\partial^2 [f \circ \varphi^{-1}](t\xi + (1-t)\xi_0)}{\partial \xi^\mu\, \partial \xi^\nu} \right\} dt\,. \tag{V.43}$$

Mit $q = \varphi^{-1}(\xi)$ ist also

$$\begin{aligned}f(q) \;&=\; f(q_0) \,+\, \sum_{\nu=1}^{m} \big(\varphi^\nu(q) - \xi_0^\nu\big)\, \frac{\partial [f \circ \varphi^{-1}](\xi_0)}{\partial \xi^\nu} \\ &\qquad + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \big(\varphi^\mu(q) - \xi_0^\mu\big)\,\big(\varphi^\nu(q) - \xi_0^\nu\big)\, F_{\mu,\nu}[\varphi(q); \xi_0]\,.\end{aligned} \tag{V.44}$$

Mit (V.41), der Leibniz-Regel und der Linearität erhalten wir daraus, dass

$$[Lf](q) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} [L\varphi^\nu](q)\,\frac{\partial[f\circ\varphi^{-1}](\xi_0)}{\partial\xi^\nu} \tag{V.45}$$

$$+ \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Big\{ [L\varphi^\mu](q)\,\big(\varphi^\nu(q)-\xi_0^\nu\big)\,F_{\mu,\nu}[\varphi(q);\xi_0] \tag{V.46}$$

$$+\,\big(\varphi^\mu(q)-\xi_0^\mu\big)\,[L\varphi^\nu](q)\,F_{\mu,\nu}[\varphi(q);\xi_0] \tag{V.47}$$

$$+\,\big(\varphi^\mu(q)-\xi_0^\mu\big)\,\big(\varphi^\nu(q)-\xi_0^\nu\big)\,\big[L\big(F_{\mu,\nu}\circ[\varphi(\cdot);\xi_0]\big)\big](q)\Big\}\,. \tag{V.48}$$

Für $q = q_0$ verschwinden die Terme (V.46) und (V.47) und wegen der Stetigkeit von L auch (V.48), und wir erhalten

$$[Lf](q_0) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} [L\varphi^\nu](q_0)\,\frac{\partial[f\circ\varphi^{-1}](\xi_0)}{\partial\xi^\nu}\,. \tag{V.49}$$

Wir setzen nun

$$X(q_0) \;:=\; \Theta_{C,q_0}^{-1}\Big[\big([L\varphi^1](q_0),\,[L\varphi^1](q_0),\,\ldots,\,[L\varphi^m](q_0)\big)^T\Big] \tag{V.50}$$

und bemerken, dass diese Definition kartenunabhängig ist (was wir hier nicht nachprüfen) und somit auf M ein Vektorfeld global definiert, d.h. es ist $X \in T_1^0[M]$. Außerdem ist

$$[L_X f](q_0) \;=\; \sum_{\nu=1}^{m} \big(\Theta_{C,q_0}[X(q)]\big)^\nu\,\frac{\partial[f\circ\varphi^{-1}](\xi_0)}{\partial\xi^\nu} \;=\; [Lf](q_0)\,. \tag{V.51}$$

Damit ist $L_{(\cdot)} : T_1^0[M] \to \mathcal{L}$ auch surjektiv. □

Definition V.7. Seien $\mathcal{M} = (M,\mathfrak{T},\mathcal{A})$ und $\mathcal{N} = (N,\mathfrak{S},\mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann definieren wir

$$\Phi_* :\; T_0^1[M] \;\to\; T_0^1[N]\,,\quad X \;\mapsto\; D[\Phi]\circ X\circ\Phi^{-1}\,. \tag{V.52}$$

Konkret ist für $X \in T_0^1[M]$ und $q \in M$, $\tilde q = \Phi(q) \in N$, $C = (U,\psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \ni q$ und $\widetilde C = (\widetilde U,\tilde\psi) \in \mathcal{B}$ mit $\widetilde U \ni \tilde q$

$$[\Phi_* X](\tilde q) \;=\; \Big(\Theta_{\widetilde C,\tilde\psi}^{-1}\circ J_{\tilde\psi\circ\Phi\circ\psi^{-1}}[\psi(q)]\circ\Theta_{C,\psi}[X(q)]\Big)\Big|_{q=\Phi^{-1}(\tilde q)} \;=\; \Theta_{\widetilde C,\tilde\psi}^{-1}\circ J_{\tilde\psi\circ\Phi\circ\psi^{-1}}[\psi\circ\Phi^{-1}(\tilde q)]\circ\Theta_{C,\psi}\big[X\big(\Phi^{-1} \tag{V.53}$$

Die Wirkung von Φ_* wird klarer, wenn man die Lie-Ableitung betrachtet.

Lemma V.8. Seien $\mathcal{M}_i = (M_i,\mathfrak{T}_i,\mathcal{A}_i)$ für $i = 1,2,3$ drei Mannigfaltigkeiten, $\Phi : M_1 \to M_2$ und $\Psi : M_2 \to M_3$ Diffeomorphismen, $X \in T_0^1[M_1]$ und $f \in C^\infty(M_2;\mathbb{R})$. Dann gelten

$$L_X(f\circ\Phi) \;=\; [L_{\Phi_* X}(f)]\circ\Phi\,, \tag{V.54}$$

$$\Psi_*\circ\Phi_* \;=\; (\Psi\circ\Phi)_*\,, \tag{V.55}$$

$$\big(\Phi^{-1}\big)_* \;=\; (\Phi_*)^{-1}\,. \tag{V.56}$$

Beweis. Seien $q_1 \in M$, $q_2 := \Phi(q_1) \in M_2$, $q_3 := \Psi(q_2) \in M_3$ und $C_i = (U_i, \eta_i) \in \mathcal{A}_i$, für $i = 1, 2, 3$. Für $f \in C^\infty(M_2; \mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} [L_{\Phi_* X}(f)](q_2) &= J_{f \circ \eta_2^{-1}}[\eta_2(q_2)] \circ \Theta_{C_2, q_2}[\Phi_* X(q_2)] \\ &= J_{f \circ \eta_2^{-1}}[\eta_2(q_2)] \circ J_{\eta_2 \circ \Phi \circ \eta_1^{-1}}[\eta_1(q_1)] \circ \Theta_{C_1, q_1}[X(q_1)] \\ &= J_{f \circ \Phi \circ \eta_1^{-1}}[\eta_1(q_1)] \circ \Theta_{C_1, q_1}[X(q_1)] \;=\; [L_X(f \circ \Phi)](q_1)\,, \end{aligned} \tag{V.57}$$

was (V.54) beweist.

Ist weiterhin $g \in C^\infty(M_3; \mathbb{R})$, so ist nach (V.54)

$$[L_{(\Psi \circ \Phi)_* X}(g)] \circ \Psi \circ \Phi \;=\; L_X(g \circ \Psi \circ \Phi) \;=\; [L_{\Phi_* X}(g \circ \Psi)] \circ \Phi \;=\; [L_{\Psi_* \circ \Phi_* X}(g)] \circ \Phi \circ \Psi\,. \tag{V.58}$$

Da g beliebig gewählt werden kann, ist $L_{(\Psi \circ \Phi)_* X} = L_{\Psi_* \circ \Phi_* X}$, und aus Satz V.6 erhalten wir damit $(\Psi \circ \Phi)_*[X] = \Psi_* \circ \Phi_*[X]$, und da auch X ein beliebiges Vektorfeld ist, folgt (V.55).

Glg. (V.56) ergibt sich aus (V.55) als Spezialfall $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1$ und $\Psi = \Phi^{-1}$. $\square$

VI. Tensoranalysis

VI.1. Tensorprodukte

Definition VI.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $E_1, E_2, \ldots, E_n$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ der Dimensionen $m_j := \dim[E_j] \in \mathbb{N}$, wobei $j \in \mathbb{Z}_1^n$.

(i) Eine Abbildung $\ell : \times_{i=1}^n E_j \to \mathbb{R}$ heißt **multilinear** :⇔

$$\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{Z}_1^n,\ (x_j)_{j=1}^n \in \times_{j=1}^n E_j,\ y_k, z_k \in E_k,\ \alpha \in \mathbb{R} : \\ &\ell(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k + \alpha z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \ = \ell(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad + \alpha \cdot \ell(x_1, \ldots, x_{k-1}, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{VI.1}$$

(ii) Das **Tensorprodukt von $E_1, \ldots, E_n$** ist definiert durch

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n \ := \ \bigotimes_{j=1}^n E_j \ := \ A^*, \tag{VI.2}$$

d.h. als Dualraum des Vektorraums

$$A \ := \ \left\{ \ell : \times_{j=1}^n E_j \ \to \ \mathbb{R} \;\middle|\; \ell \text{ ist multilinear} \right\}. \tag{VI.3}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien ${}^1\psi^* \in E_1^*$, ${}^2\psi^* \in E_2^*, \ldots,$ ${}^n\psi^* \in E_n^*$. Dann definiert ${}^1\psi^* \otimes \ldots \otimes {}^n\psi^* : \times_{j=1}^n E_j \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle {}^1\psi^* \otimes \ldots \otimes {}^n\psi^*, (x_1, \ldots, x_n) \right\rangle := \left\langle {}^1\psi^*, x_1 \right\rangle \cdot \ldots \cdot \left\langle {}^n\psi^*, x_n \right\rangle \tag{VI.4}$$

offensichtlich eine multilineare Abbildung.

Lemma VI.2. Seien $\left\{ e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)} \right\} \subseteq E_j$ Basen und $\left\{ e_1^{(j)^*}, e_2^{(j)^*}, \ldots, e_{m_j}^{(j)^*} \right\} \subseteq E_j^*$ die zugehörigen dualen Basen, $\left\langle e_i^{(j)^*}, e_k^{(j)} \right\rangle = \delta_{ik}$, für $j \in \mathbb{Z}_1^n$. Dann ist

$$\mathcal{E}^* := \left\{ e_{k_1}^{(1)^*} \otimes e_{k_2}^{(2)^*} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)^*} \;\middle|\; k_1 \in \mathbb{Z}_1^{m_1}, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_1^{m_n} \right\} \subseteq A \tag{VI.5}$$

eine Basis.

Beweis. Nach obiger Bemerkung ist $\mathcal{E}^* \subseteq A$ und damit auch $\mathrm{span}\mathcal{E}^* \subseteq A$. Seien weiterhin $\alpha(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}$, für $k_j \in \mathbb{Z}_1^{m_j}$, und

$$\lambda^* := \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{m_n} \alpha(l_1, \ldots, l_n) e_{l_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{l_n}^{(n)^*} = 0. \tag{VI.6}$$

Für $k_1 \in \mathbb{Z}_1^{m_1}, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_1^{m_n}$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \lambda^*, \left(e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_{k_n}^{(n)}\right)\right\rangle \\ &= \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{m_n} \alpha(l_1, \ldots, l_n) \left\langle e_{l_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{l_n}^{(n)^*}, \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)}\right)\right\rangle \\ &= \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{m_n} \alpha(l_1, \ldots, l_n) \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left\langle e_{l_j}^{(j)^*}, e_{k_j}^{(j)}\right\rangle}_{=\delta_{l_j k_j}} \\ &= \alpha(k_1, \ldots, k_n). \end{aligned} \tag{VI.7}$$

Also ist $\mathcal{E}^*$ linear unabhängig. Ist nun $\lambda^* \in A$, so setzen wir

$$\widehat{\lambda}^* := \sum_{l_1,\ldots,l_n} \lambda^* \left(e_{l_1}^{(1)}, \ldots, e_{l_n}^{(n)}\right) e_{l_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{l_n}^{(n)^*} \tag{VI.8}$$

und beobachten, dass (wie in (VI.7)) für alle $k_1, \ldots, k_n$,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}^* \left(e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_{k_n}^{(n)}\right) &= \sum_{l_1,\ldots,l_n} \lambda^* \left(e_{l_1}^{(1)}, \ldots, e_{l_n}^{(n)}\right) \underbrace{\left\langle e_{l_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{l_n}^{(n)^*}, \left(e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_{k_n}^{(n)}\right)\right\rangle}_{=\prod_{j=1}^{n} \delta_{l_j k_j}} \\ &= \lambda^* \left(e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_{k_n}^{(n)}\right). \end{aligned} \tag{VI.9}$$

Da sowohl λ^* als auch $\widehat{\lambda}^*$ multilinear sind, gilt somit auch

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}^* &= \widehat{\lambda}^* \left(\sum_{l_1=1}^{m_1} \left\langle e_{l_1}^{(1)^*}, x_1\right\rangle e_{l_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{l_n=1}^{m_n} \left\langle e_{l_n}^{(n)^*}, x_n\right\rangle e_{l_n}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left(\prod_{j=1}^{n} \left\langle e_{l_j}^{(j)^*}, x_j\right\rangle\right) \widehat{\lambda}^* \left(e_{l_1}^{(1)}, \ldots, e_{l_n}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left(\prod_{j=1}^{n} \left\langle e_{l_j}^{(j)^*}, x_j\right\rangle\right) \lambda^* \left(e_{l_1}^{(1)}, \ldots, e_{l_n}^{(n)}\right) \\ &= \lambda^*(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{VI.10}$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \times_{j=1}^{n} E_j$, d.h.

$$\lambda^* = \widehat{\lambda}^* \in \mathrm{span}\mathcal{E}^*. \tag{VI.11}$$

□

Korollar VI.3. Für $j \in \mathbb{Z}_1^n$ seien E_j reelle Vektorräume der Dimensionen $m_j \in \mathbb{N}$, $\left\{e_1^{(j)}, \ldots, e_{m_j}^{(j)}\right\} \subseteq E_j$ Basen und $\left\{e_1^{(j)^*}, \ldots, e_{m_j}^{(j)^*}\right\} \subseteq E_j^*$ die zugehörigen dualen Basen. Dann ist

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_n) = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \tag{VI.12}$$

und

$$\left\{e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)} \,\middle|\, k_1 \in \mathbb{Z}_1^{m_1}, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_1^{m_n}\right\} \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n} E_j \tag{VI.13}$$

ist eines Basis, wobei

$$e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)} := \left(e_{k_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)^*}\right)^*, \tag{VI.14}$$

d.h.

$$\left\langle e_{l_1}^{(1)^*} \otimes \ldots \otimes e_{l_n}^{(n)^*}, e_{k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)} \right\rangle = \delta_{(l_1,\ldots,l_n),(k_1,\ldots,k_n)} = \prod_{j=1}^{n} \delta_{l_j k_j}. \tag{VI.15}$$

Definition VI.4. Für $j \in \mathbb{Z}_1^n$ seien E_j, F_j reellen Vektorräume endlicher Dimension und $L_j \in \mathcal{B}(E_j; F_j)$. Dann ist $(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n) \in \mathcal{B}\left(\bigotimes_{j=1}^n E_j; \bigotimes_{j=1}^n F_j\right)$ definiert durch (die lineare Fortsetzung von)

$$(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n)\left(e_{k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^{(n)}\right) := \left(L_1 e_{k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes L_n e_{k_n}^{(n)}\right). \tag{VI.16}$$

VI.2. Tensorfelder, Metriken und Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition VI.5. Seien $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und $r, s \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum $\boldsymbol{T_q{}^r_s[M]}$ **der Tensoren, die kovariant $\boldsymbol{r}$. Stufe und kontravariant $\boldsymbol{s}$. Stufe** sind, ist gegeben durch

$$T_q{}^r_s[M] := \left(\bigotimes_{j=1}^{r} T_q^*[M]\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{s} T_q[M]\right). \tag{VI.17}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} &\left\{L_1 \otimes \ldots \otimes L_n : \bigotimes_{j=1}^{n} E_j \to \bigotimes_{j=1}^{n} F_j \text{ ist bijektiv}\right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{\forall\, j \in \mathbb{Z}_1^n : L_j : E_j \to F_j \text{ ist bijektiv}\right\}. \end{aligned} \tag{VI.18}$$

- Sei $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $q \in U$. Mit (VI.18) ist somit

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{r} \Theta^*_{C,q} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{s} \Theta_{C,q} \right) : T_q{}^r_s[M] \to \mathbb{R}^{(m^{r+s})} \tag{VI.19}$$

ein Isomorphismus.

- Wir definieren nun $T^r_s[U] := \bigcup_{q \in U} \{q\} \times T_q{}^r_s[M]$ und durch

$$\begin{aligned} &\left(\bigotimes^{r} \Theta^*_{C} \right) \otimes \left(\bigotimes^{s} \Theta_{C} \right) : T^r_s[U] \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{(m^{r+s})}, \\ &\left(\left(\bigotimes^{r} \Theta^*_{C} \right) \otimes \left(\bigotimes^{s} \Theta_{C} \right) \right) \Big(q, \eta^*_1 \otimes \ldots \otimes \eta^*_r \otimes \kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_s \Big) \\ &\qquad := \Big(\varphi(q), \Theta^*_C[\eta^*_1] \otimes \ldots \otimes \Theta^*_C[\eta^*_r] \otimes \Theta_C[\kappa_1] \otimes \ldots \otimes \Theta_C[\kappa_s] \Big) \end{aligned} \tag{VI.20}$$

eine Karte von

$$T^r_s[M] := \bigcup_{q \in M} \{q\} \times T_q{}^r_s[M]. \tag{VI.21}$$

- Sind $C = (U, \varphi)$ und $\widetilde{C} = (\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ zwei miteinander verträgliche Karten von M, so sind auch $(T^r_s[U], (\bigotimes^r \Theta^*_C) \otimes (\bigotimes^s \Theta_C))$ und $(T^r_s[\widetilde{U}], (\bigotimes^r \Theta^*_{\widetilde{C}}) \otimes (\bigotimes^s \Theta_{\widetilde{C}}))$ miteinander verträglich.

Definition VI.6. Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit.

(i) Die Mannigfaltigkeit $(T^r_s[M], \times^{r+s}\mathfrak{T}, \mathcal{A}^r_s)$, mit Atlas

$$\mathcal{A}^r_s := \left\{ \left(T^r_s[U], \left(\bigotimes^{r} \Theta^*_C \right) \otimes \left(\bigotimes^{r} \Theta_C \right) \right) \middle| C = (U, \varphi) \in \mathcal{A} \right\} \tag{VI.22}$$

heißt **Bündel der r-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensoren**.

(ii) Eine Abbildung $t \in C^\infty(\mathcal{M}; T^r_s[M])$ mit $t \circ \pi = \mathrm{id}_M$ heißt **r-fach kovariantes und s-fach kontravariantes Tensorfeld** oder kurz **$r - s-$Tensorfeld**. Die Menge der $r-s-$Tensorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{T}^r_s[M]$. Lokal kann man t schreiben als

$$t(q) = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{m} \sum_{j_1, \ldots, j_s}^{m} \alpha^{\,i_1, \ldots, i_r}_{\,j_1, \ldots, j_r}(q) d\varphi_{i_1}(q) \otimes \ldots \otimes d\varphi_{i_r}(q) \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi_{j_1}(q)} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \varphi_{j_s}(q)}. \tag{VI.23}$$

Definition VI.7. Seien $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $g \in \mathcal{T}^2_0[M]$ ein $2-0-$Tensorfeld, da lokal bei $q \in M$ als $g(q) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(q)\, d\varphi_i(q) \otimes d\varphi_j(q)$ geschrieben werden kann.

(i) Das Tensorfeld g heißt **Metrik (auf M)**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall\, q \in M: \quad g^{ij}(q) = g^{ji}(q) \text{ und alle Eigenwerte von } (g^{ij}(q))_{i,j=1}^m \in \mathfrak{M}_{m\times m}(\mathbb{R}) \text{ sind strikt positiv.} \tag{VI.24}$$

In diesem Fall heißt $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A}, g)$ **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

(ii) $(M, \mathcal{T}, \mathcal{A}, g)$ heißt **pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit**

$$:\Leftrightarrow \forall\, q \in M: g^{ij}(q) = g^{ji}(q),\ \det[g(q)] \neq 0,\ \text{und } g(q) \text{ ist indefinit.} \tag{VI.25}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Die einfach kontravarianten Tensorfelder sind genau die Vektorfelder, die einfach kovarianten Tensorfelder die Kovektorfelder.
- Eine Metrik $g \in \mathcal{T}^2_0[M]$ auf M definiert zu $q \in M$ ein (positiv definites) Skalarprodukt auf $T_q[M]$ durch

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : T_q[M] \times T_q[M] \to \mathbb{R}, \tag{VI.26}$$

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial\varphi_i(q)} \Big| \frac{\partial}{\partial\varphi_j(q)} \Big\rangle := g^{ij}(q), \tag{VI.27}$$

falls g lokal durch $g(q) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(q) d\varphi_i(q) \otimes d\varphi_j(q)$ gegeben ist. (Selbstverständlich ist hier nachzuprüfen, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ wohldefiniert - also kartenunabhängig - ist.)

- Sind umgekehrt $\langle\cdot|\cdot\rangle_q : T_q[M] \times T_q[M] \to \mathbb{R}$ Skalarprodukte und $g^{ij}(q) := \langle \frac{\partial}{\partial d\varphi_i(q)} | \frac{\partial}{\partial\varphi_j(q)} \rangle$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}_1^m$ glatt in q, so definiert $g(q) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(q) d\varphi_i(q) \otimes d\varphi_j(q)$ eine Metrik auf M. Die Metriken auf M stehen also mit Skalarprodukten auf $T_q[M]$ in Bijektion.

Satz VI.8. Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Metrik $g \in \mathcal{T}^2_0[M]$ auf M.

Beweis. Nach Satz III.8 kann $M \subseteq \mathbb{R}^{2m+1}$ eingebettet werden und $(\mathbb{R}^{2m+1}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^{2m+1}}, (\mathbb{R}^{2m+1}, \mathrm{id}))$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit bezüglich der Metrik $g(x) = \sum_{j=1}^{2m+1} dx_j \otimes dx_j$ (also die vom euklidischen Skalarprodukt auf $T_x[\mathbb{R}^{2m+1}] = \mathbb{R}^{2m+1}$ induzierte). Für eine Teilmannigfaltigkeit $N \subseteq \widehat{N}$ gilt jedoch in kanonischer Weise $T_q[N] \subseteq T_q[\widehat{N}]$ und daher induziert das von $T_q[\mathbb{R}^{2m+1}]$ auf $T_q[M]$ restringierte Skalarprodukt ein Skalarprodukt auf $T_q[M]$ und somit eine Metrik auf M. □

Bemerkungen und Beispiele.

- Seien $M = \{q \in \mathbb{R}^r | |q| = r\}$, $r > 0$, $U := M \cap \{q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$ und $\varphi : U \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \pi)$,

$$\varphi^{-1}(\vartheta, \alpha) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\alpha \\ r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\alpha \\ r \cdot \sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{VI.28}$$

Auflösen nach den Koordinaten liefert

$$\varphi_1(q) \equiv \vartheta(q) := \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \tag{VI.29}$$

$$\varphi_2(q) \equiv \alpha(q) := \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \tag{VI.30}$$

Wir setzen $C := (U, \varphi)$. Wegen $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist zu $q \in M \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_q(M) &= \{\gamma \in C^1((a,b);M) | a < 0 < b, \gamma(0) = q\} \\ &\subseteq \{\gamma \in C^1((a,b);\mathbb{R}^3) | a < 0 < b, \gamma(0) = q\} \\ &= \widetilde{T}_q(\mathbb{R}^3), \end{aligned} \tag{VI.31}$$

und insofern erwarten wir, dass auch $T_q(M) \subseteq T_q(\mathbb{R}^3)$ gilt. Dies ist in der tat richtig; wir müssen aber vorsichtig vorgehen. Verwenden wir die Karte C von M, so ergibt sich nach Definition IV.19

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta(q)} = \Theta_{C,q}^{-1}(e_1), \quad \frac{\partial}{\partial\alpha(q)} = \Theta_{C,q}^{-1}(e_2). \tag{VI.32}$$

Aus dieser Gleichung können wir nicht die gewünschte Inklusion ablesen. Betrachten wir jedoch die Karte $(\mathbb{R}^3, \mathrm{id})$ von $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\Theta_{(\mathbb{R}^3,\mathrm{id}),q} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \tag{VI.33}$$

und mit

$$\gamma_{q,\vartheta}(t) = \varphi^{-1}(\vartheta + t, \alpha), \quad \gamma_{q,\alpha}(t) = \varphi^{-1}(\vartheta, \alpha + t), \tag{VI.34}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_{q,\vartheta})(0) = \begin{pmatrix} -r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\alpha \\ -r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\alpha \\ r\cdot\cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{VI.35}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_{q,\alpha})(0) = \begin{pmatrix} -r\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\alpha \\ r\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{VI.36}$$

Mit (VI.33) erhalten wir also

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta(q)} = \begin{pmatrix} -r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\alpha \\ -r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\alpha \\ r\cdot\cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha(q)} = \begin{pmatrix} -r\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\alpha \\ r\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in T_q[\mathbb{R}^3] \tag{VI.37}$$

Wie im Beweis von Satz VI.8 vorgegeben, bilden wir nun

$$g^{\vartheta\vartheta}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial\vartheta(q)} \middle| \frac{\partial}{\partial\vartheta(q)} \right\rangle_{\mathrm{eukl}} = r^2(\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\alpha + \sin^2\vartheta\cdot\sin^2\alpha + \cos^2\vartheta) = r^2, \tag{VI.38}$$

$$g^{\alpha\alpha}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial\alpha(q)} \middle| \frac{\partial}{\partial\alpha(q)} \right\rangle_{\mathrm{eukl}} = r^2\cos^2\vartheta\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = r^2, \tag{VI.39}$$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\vartheta}(q) = g^{\vartheta\alpha}(q) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial\alpha(q)} \middle| \frac{\partial}{\partial\vartheta(q)} \right\rangle_{\mathrm{eukl}} \\ &= r^2\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha) = 0, \end{aligned} \tag{VI.40}$$

und erhalten die Metrik ($q = \varphi^{-1}(\vartheta, \alpha)$)

$$g(q) = r^2 d\vartheta(q) \otimes d\vartheta(q) + r^2 \cdot \cos\vartheta \, d\alpha(q) \otimes d\alpha(q). \tag{VI.41}$$

Für die nächste Definition machen wir eine Vorbetrachtung. Sind $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $(N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei m-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \to N$ eine Diffeomorphismus, so definiert die Ableitung $D_q[\Phi] : T_q[M] \to T_{\Phi(q)}[N]$,

$$D_q[\Phi] = \Theta^{-1}_{\widetilde{C}, \Phi(q)} \circ J_{\widetilde{\varphi} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}}(\varphi(q)) \circ \Theta_{C,q} \tag{VI.42}$$

einen Isomorphismus. Wir wollen nun einen Isomorphismus $D^*_q[\Phi] : T^*_q[M] \to T^*_{\Phi(q)}[N]$ so definieren, dass für alle $v^* \in T^*_q[M]$ und $w \in T_q[M]$

$$\big\langle D^*_q[\Phi]v^* \big| D_q[\Phi]w \big\rangle_N = \big\langle v^* \big| w \big\rangle_M. \tag{VI.43}$$

Mit (IV.63), d.h. $\langle L^T y^* | x \rangle = \langle y^* | Lx \rangle$, folgt dann

$$\big\langle v^* \big| w \big\rangle_M = \big\langle D^*_q[\Phi v^* \big| D_q[\Phi]w \big\rangle_N = \big\langle D_q[\Phi]^T D_q[\Phi]^* v^* \big| w \big\rangle_M. \tag{VI.44}$$

Da v^* und w alle Vektoren in $T^*_q[M]$ bzw. $T_q[M]$ durchlaufen, folgt daraus, dass

$$D^*_q[\Phi] = \big(D_q[\Phi]^{-1}\big)^T = \big(D_q[\Phi]^T\big)^{-1}. \tag{VI.45}$$

Definition VI.9. Seien $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $(N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ Mannigfaltigkeiten der Dimension m und $\Phi \in C^\infty(M, N)$ ein Diffeomorphismus.

(i) Wir definieren

$$D^*[\Phi] : T^*[M] \to T^*[N], \quad D^*[\Phi](q, v^*) := \Big(\Phi(q), \big(D_q[\Phi]^T\big)^{-1}(v^*)\Big). \tag{VI.46}$$

(ii) Weiterhin induziert Φ einen Diffeomorphismus

$$\Phi_* : \mathcal{T}^r_s[M] \to \mathcal{T}^r_s[N], \quad \Phi_* t := \left(\bigotimes^r D^*[\Phi] \otimes \bigotimes^s D[\Phi] \right) \circ t \circ \Phi^{-1}. \tag{VI.47}$$

Satz VI.10. Seien $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ und $(N, \mathfrak{S}, \mathcal{B})$ zwei m-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $\Phi \in C^\infty(M; N)$ ein Diffeomorphismus, $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ und $df \in \mathcal{T}^1_0[M]$ das lokal durch $df(q) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}|_{x=\varphi(q)} \cdot d\varphi_j(q)$ gegebene Vektorfeld. Dann ist

$$\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi^{-1}). \tag{VI.48}$$

Beweis. Mit $p = \Phi(q) \in N$, $q \in M$ ist für alle $v \in T_p[N]$

$$\begin{aligned} \big\langle d(f \circ \Phi^{-1})(p) \big| v \big\rangle_N &= D_p[f \circ \Phi^{-1}](v) = D_{\Phi^{-1}(p)}[f] \circ D_p[\Phi^{-1}](v) \\ &= \big\langle df(\Phi^{-1})(p) \big| D_p[\Phi^{-1}]v \big\rangle_M = \big\langle D_p[\Phi^{-1}]^T \circ df(\Phi^{-1})(p) \big| v \big\rangle_N \\ &= \big\langle \Phi_*(df)(p) \big| v \big\rangle_N. \end{aligned} \tag{VI.49}$$

□

VI.3. Differenzialformen

Als Nächstes wenden wir uns den antisymmetrischen Differentialformen, den p-Formen, $p = 0, 1, \ldots, m$, zu. Dazu betrachten wir einen m-dimensionalen Vektorraum E mit Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq E$. Dann bilden die Vektoren

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} | \forall\, j \in \mathbb{Z}_1^p : i_j \in \mathbb{Z}_1^m\} \subseteq \bigotimes^p E := \bigotimes_{j=1}^p E \tag{VI.50}$$

eine Basis. Wir vereinbaren außerdem, dass $\bigotimes^0 E := \mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1$ ($\cong$ konst. Funktionen). Für $p \in \mathbb{N}$ definieren wir nun $A_p \in \mathcal{B}[\bigotimes^p E; \bigotimes^p E]$ durch lineare Fortsetzung von

$$A_p(\psi_1 \otimes \psi_\otimes \ldots \otimes \psi_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_p} (-1)^\pi \psi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(p)}, \tag{VI.51}$$

wobei $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p \in E$. Außerdem setzen wir $A_0 := \mathrm{id}_{\bigotimes^0 E}$. Beachte, dass ($\pi := \eta \circ \kappa$)

$$\begin{aligned}
A_p^2(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_p} (-1)^\kappa A_p(\psi_{\kappa(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\kappa(p)}) \\
&= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{\eta, \kappa \in \mathcal{S}_p} (-1)^\kappa (-1)^p \, \psi_{\eta\circ\kappa(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\eta\circ\kappa(p)} \\
&= \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{\eta, \pi \in \mathcal{S}_p} (-1)^\pi \, \psi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \psi_{\pi(p)} \\
&= A_p(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_p),
\end{aligned} \tag{VI.52}$$

d.h.

$$A_p^2 = A_p \tag{VI.53}$$

ist eine Projektion. Wir setzen

$$A_p(\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \ldots \otimes \psi_p) =: \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_p. \tag{VI.54}$$

Offensichtlich gelten

$$\psi_{\pi(1)} \wedge \psi_{\pi(2)} \wedge \ldots \wedge \psi_{\pi(p)} = (-1)^\pi \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p, \tag{VI.55}$$

und daher

$$\psi_i = \psi_j,\, i < j \Rightarrow \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_i \wedge \ldots \wedge \psi_j \wedge \ldots \wedge \psi_p = 0, \tag{VI.56}$$

wie bei Determinanten. Insbesondere ist

$$\forall\, (i_1, \ldots, i_p) \in (\mathbb{Z}_1^m)^p : e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = 0, \tag{VI.57}$$

falls $p > m$, da in diesem Fall stets (mindestens) zwei Indizes $i_k = i_l$, $l < k$, übereinstimmen. Daher ist

$$\forall\, p \geq m + 1 : A_p = 0, \tag{VI.58}$$

und wir können im Weiteren oB.d.A. $0 \leq p \leq m$ annehmen.

Definition VI.11. Seien $p \in \mathbb{N}_{\not\vdash}^{\gtrdot}$ und E ein m-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Den Teilraum

$$\bigwedge^p E := A_p \left[\bigotimes^p E \right] \tag{VI.59}$$

bezeichnet man als das **($\boldsymbol{p}$-fache) antisymmetrische Tensorprodukt von $\boldsymbol{E}$**.

Lemma VI.12. Sei $p \in \mathbb{Z}_0^m$ und E ein m-dimensionaer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathcal{L}_p := \{ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m \} \subseteq \bigwedge^p E \tag{VI.60}$$

ist eine Basis, und $\bigwedge^p E$ hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\bigwedge^p E \right) = \binom{m}{p}. \tag{VI.61}$$

Beweis. Nach (VI.55) und (VI.57) gilt

$$\operatorname{span}(\mathcal{L}_p) = \bigwedge^p E, \tag{VI.62}$$

und es verbleibt die Unabhängigkeit zu zeigen. Wir verzichten darauf. □

Wir wollen nun zwischen antisymmetrischen Tensorprodukten verschiedenen Grades hin- und herspringen können und definieren dazu das Keilprodukt.

Definition VI.13. Seien $p, \widetilde{p} \in \mathbb{N}$. Dann ist das **Keilprodukt**

$$\wedge : \left(\bigwedge^p E \right) \times \left(\bigwedge^{\widetilde{p}} E \right) \to \bigwedge^{p+\widetilde{p}} E \tag{VI.63}$$

durch

$$\omega_p \wedge \omega_{\widetilde{p}} := A_{p+\widetilde{p}}[\omega_p \otimes \omega_{\widetilde{p}}] \tag{VI.64}$$

definiert.

Bemerkungen und Beispiele.

- Es sind stets $\bigwedge^0 E = \mathbb{R} \cdot 1$ und $\bigwedge^1 E = \bigotimes^1 E = E$.
- Für $E = \mathbb{R}^2$ sind also

$$\bigwedge^0 E = \mathbb{R} \cdot 1, \quad \bigwedge^1 E = \mathbb{R}, \quad \bigwedge^2 E = \mathbb{R} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}_{=2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.} \tag{VI.65}$$

- Für $E = \mathbb{R}^3$ sind

$$\begin{aligned} \bigwedge^0 E = \mathbb{R}\cdot 1, \quad & \bigwedge^1 E = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \\ \bigwedge^2 E = \mathrm{span}\{e_2\wedge e_3, e_1\wedge e_3, e_1\wedge e_2\}, \quad & \bigwedge^3 E = \mathbb{R}\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3. \end{aligned} \tag{VI.66}$$

- Offensichtlich sind (wegen der gleichen Dimension) $\bigwedge^p E$ und $\bigwedge^{m-p} E$ isomorph.
- Das Keilprodukt fügt sich konsistent in die Definition (VI.54) ein, denn (VI.64) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p)\wedge(\psi_{p+1}\wedge\ldots\wedge\psi_{p+\widetilde{p}}) &= A_{p+\widetilde{p}}\big((\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p)\otimes(\psi_{p+1}\wedge\ldots\wedge\psi_{p+\widetilde{p}})\big) \\ &= \psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p\wedge\psi_{p+1}\wedge\ldots\wedge\psi_{p+\widetilde{p}}, \end{aligned} \tag{VI.67}$$

  d.h. das Keilprodukt ist assoziativ.
- Nach (VI.67) ist dann auch

$$\begin{aligned} (\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p)\wedge(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_{\widetilde{p}}) &= \psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p\wedge\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_{\widetilde{p}} \\ &= (-1)^p\varphi_1\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_{\widetilde{p}} \\ &\;\vdots \\ &= (-1)^{p\cdot\widetilde{p}}\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_{\widetilde{p}}\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p \\ &= (-1)^{p\cdot\widetilde{p}}(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_{\widetilde{p}})\wedge(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_p). \end{aligned} \tag{VI.68}$$

  Durch Linearität überträgt sich dies auf $\bigwedge^p E \times \bigwedge^{\widetilde{p}} E$, und wir erhalten

$$\omega_p\wedge\widetilde{\omega}_{\widetilde{p}} = (-1)^{p\cdot\widetilde{p}}\,\widetilde{\omega}_{\widetilde{p}}\wedge\omega_p, \tag{VI.69}$$

  für $\omega_p\in\bigwedge^p E$ und $\widetilde{\omega}_{\widetilde{p}}\in\bigwedge^{\widetilde{p}} E$.
- Die **Hodge-Abbildung** $^{(*)} : \bigwedge^p E \to \bigwedge^{m-p} E$ ist durch die lineare Fortsetzung von

$$(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p})^{(*)} := \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{m-p} \\ 1,\ldots,p,p+1,\ldots,m \end{pmatrix}\cdot(e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_{m-p}}) \tag{VI.70}$$

  definiert, wobei $1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le m$ und $1\le j_1<j_2<\ldots<j_{m-p}\le m$, so dass

$$\{j_1,\ldots,j_{m-p}\} = \mathbb{Z}_1^m\setminus\{i_1,\ldots,i_p\}. \tag{VI.71}$$

- Sind $p\in\mathbb{Z}_1^m$ und $w\in E^*$, so ist die **Kontraktion** $\iota_\omega : \bigwedge^p E\to\bigwedge^{p-1} E$ durch lineare Fortsetzung von

$$\iota_\omega(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_p) := \sum_{j=1}^p(-1)^{j+1}\langle\omega|\varphi_j\rangle\,\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_{j-1}\wedge\varphi_{j+1}\wedge\ldots\wedge\varphi_p \tag{VI.72}$$

  und $\iota_\omega : \bigwedge^0 E\to\bigwedge^0 E$, $\iota_\omega = 0$, definiert.

Definition VI.14. Sei E ein m-dimensionaler Vektorraum. Die direkte Summe

$$\mathfrak{F}_f(E) := \bigwedge E := \bigoplus_{p=0}^{m} \Big(\bigwedge^{p} E \Big) \tag{VI.73}$$

der VR der p-fach antisymm. Tensorprodukte nenn man **fermionischer Fockraum über $\boldsymbol{E}$**.

Definition VI.15. Seien $p \in \mathbb{Z}_0^m$ und $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das Vektorbündel mit Basis M und Faser $\bigwedge^p T_q^*[M]$ ist

$$\bigwedge^{p} T^*[M] := \bigcup_{q \in M} \{q\} \times \bigwedge^{p} T_q^*[M]; \tag{VI.74}$$

die antisymmetrischen Tensorfelder

$$\bigwedge^{(p)}[M] := \Big\{ \omega_p \in C^\infty\big(M; \bigwedge^{p} T^*[M]\big) \Big| \pi \circ \omega_p = \mathrm{id}_M \Big\} \subseteq \mathcal{T}^{\,p}_{\,0}(M) \tag{VI.75}$$

bezeichnen wir als **$\boldsymbol{p}$-Formen (auf M)**,

$$\bigwedge[M] := \Big\{ \omega \in C^\infty\big(M; \bigwedge T^*[M]\big) \Big| \pi \circ \omega = \mathrm{id}_M \Big\}, \tag{VI.76}$$

ist der Raum der **Differentialformen**.

Bemerkungen und Beispiele.

$$\bigwedge^{(0)} = C^\infty(M; \mathbb{R}), \quad \bigwedge^{(1)} = \mathcal{T}^{\,1}_{\,0}[M]. \tag{VI.77}$$

VI.4. Die äußere Ableitung

Definition VI.16. Sei $(M, \mathcal{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $q \in M$ und $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$, so dass $q \in U$.

(i) Die **äußere Ableitung** $d : \bigwedge^{(0)}[M] \to \bigwedge^{(1)}[M]$ ist definiert durch

$$df(q) := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}\Big|_{x=\varphi(q)} \cdot d\varphi_j(q). \tag{VI.78}$$

(ii) Für $p \in \mathbb{Z}_1^{m-1}$ ist die äußere Ableitung $d : \bigwedge^{(p)}[M] \to \bigwedge^{(p+1)}[M]$ durch lineare Fortsetzung von

$$d(f \cdot \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_p})(q) := df(q) \wedge d\varphi_{i_1}(q) \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}(q) \tag{VI.79}$$

definiert.

(iii) Die äußere Ableitung $d : \bigwedge[M] \to \bigwedge[M]$ ist durch

$$d\left(\bigoplus_{p=0}^{m} \omega_p\right)(q) := \bigoplus_{p=0}^{m-1} d\omega_p(q) \tag{VI.80}$$

definiert. (Insbesondere ist $d(\bigwedge^{(m)}[M]) = 0$.)

Lemma VI.17. Seien $p, \widetilde{p} \in \mathbb{Z}_0^m$, $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann besitzt die äußere Ableitung folgende Eigenschaften:

$$(i)\, \forall\, \omega, \widetilde{\omega} \in \bigwedge[M],\ \alpha \in \mathbb{R} : d(\omega + \alpha\widetilde{\omega}) = d\omega + \alpha d\widetilde{\omega}, \tag{VI.81}$$

$$(ii)\, \forall\, \omega_p \in \bigwedge^{(p)}[M],\ \widetilde{\omega}_{\widetilde{p}} \in \bigwedge^{(\widetilde{p})}[M] : d(\omega_p \wedge \widetilde{\omega}_{\widetilde{p}}) = d\omega_p \wedge \widetilde{\omega}_{\widetilde{p}} + (-1)^p \omega_p \wedge d\widetilde{\omega}_{\widetilde{p}}, \tag{VI.82}$$

$$(iii)\, \forall\, \omega \in \bigwedge[M] : d^2\omega = d(d\omega) = 0\,. \tag{VI.83}$$

Beweis. (i) ist trivial.
(ii) erhalten wir durch lineare Fortsetzung aus $d(fg) = g \cdot df + f \cdot dg$ und

$$\begin{aligned}
&d\Big[\big(f\, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big) \wedge \big(g\, d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\big)\Big] \\
&\quad = d\Big[(fg)\, d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p} \wedge d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\Big] \\
&\quad = d(fg) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p} \wedge d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}} \\
&\quad = g \cdot df \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p} \wedge d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}} \\
&\qquad + f \cdot dg \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p} \wedge d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}} \\
&\quad = \big(df \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big) \wedge \big(g \cdot d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\big) \\
&\qquad + (-1)^p \big(f \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big) \wedge \big(dg \wedge d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\big) \\
&\quad = \Big(d\big[f \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big]\Big) \wedge \Big(g \cdot d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\Big) \\
&\qquad + (-1)^p \Big(f \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\Big) \wedge \Big(d\big[g \cdot d\varphi_{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_{p+\widetilde{p}}}\big]\Big).
\end{aligned} \tag{VI.84}$$

(iii) ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
d^2\big(f \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big) &= d\big[df \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big] \\
&= \sum_{j=1}^{m} d\left[\left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi\right) \cdot d\varphi_j \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\right] \\
&= \sum_{k,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k \partial x_j} \circ \varphi\right) \cdot d\varphi_k \wedge d\varphi_j \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k \partial x_j} \circ \varphi\right) \cdot (d\varphi_k \wedge d\varphi_j)\right)}_{=0} \wedge \big(d\varphi_{i_1} \wedge \ldots d\varphi_{i_p}\big),
\end{aligned} \tag{VI.85}$$

denn

$$\sum_{k,j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_k\partial x_j}\circ\varphi\right)\cdot d\varphi_k\wedge d\varphi_j=\sum_{j,k=1}^{m}\underbrace{\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j\partial x_k}\circ\varphi\right)}_{=\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_k\partial x_j}\circ\varphi\right)}\cdot\underbrace{d\varphi_j\wedge d\varphi_k}_{=-d\varphi_k\wedge d\varphi_j}$$
$$=-\sum_{k,j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_k\partial x_j}\circ\varphi\right)\cdot d\varphi_k\wedge d\varphi_j. \tag{VI.86}$$

□

Lemma VI.18. Sei $(M,\mathfrak{T},\mathcal{A})$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist die äußere Ableitung durch ihre Wirkung auf $\bigwedge^{(0)}=C^\infty(M;\mathbb{R})$ und die Eigenschaften (VI.81)-(VI.83) eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\widetilde{d}:\bigwedge[M]\to\bigwedge[M]$ eine weitere Abbildung, so dass $\widetilde{d}\big|_{\bigwedge^{(0)}[M]}=d\big|_{\bigwedge^{(0)}[M]}$ und $\widetilde{d}$ die Eigenschaften (VI.81) - (VI.83) besitzt. Dann ist

$$\widetilde{d}\big[f\cdot d\varphi_{i_1}\wedge\ldots d\varphi_{i_p}\big]=\underbrace{\widetilde{d}f}_{=df}\wedge d\varphi_{i_1}\wedge\ldots d\varphi_{i_p}$$
$$+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j f\cdot d\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\widetilde{d}(d\varphi_{i_j})\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p}. \tag{VI.87}$$

Für $i\in\mathbb{Z}_1^m$ ist jedoch $d\varphi_i=d(\varphi_i)$, wobei $\varphi\in C^\infty(U;\mathbb{R})$ die i. Koordinatenfunktion der Kartenabbildung ist. Also ist $d\varphi_i=\widetilde{d}(\varphi_i)$ und $\widetilde{d}(d\varphi_i)=\widetilde{d}(\widetilde{d}(\varphi_i))=0$. Damit ist aber

$$\widetilde{d}\big[f\cdot d\varphi_{i_1}\wedge\ldots d\varphi_{i_p}\big]=df\wedge d\varphi_{i_1}\wedge\ldots d\varphi_{i_p}=d\big[f\cdot d\varphi_{i_1}\wedge\ldots d\varphi_{i_p}\big]. \tag{VI.88}$$

□

Korollar VI.19. Die äußere Ableitung $d:\bigwedge[M]\to\bigwedge[M]$ ist wohldefiniert, also kartenunabhängig.

Beweis. Wäre $\widetilde{d}$ bei $q\in M$ mit einer anderen Karte $\widetilde{C}=(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ mit $q\in\widetilde{U}$ definiert, so besäße $\widetilde{d}$ die Eigenschaften (VI.81) - (VI.83) und würde auf $C^\infty(M;\mathbb{R})$ mit d übereinstimmen. Nach Lemma VI.18 ist also $d=\widetilde{d}$. □

VII. Integrale und der Satz von Stokes

VII.1. Name

Bei der Definition des Integrals auf einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ spielen die m-Formen ($p = m$) eine große Rolle. Wir erinnern uns zunächst auf die Tatsache, dass lokal $\bigwedge^{(m)}[U] \simeq \bigwedge^{(0)}[U] = C^\infty(U, \mathbb{R})$ in einen Kartengebiet $U \subseteq M$ einer Karte $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ gilt,

$$\bigwedge^{(m)}[U] \;=\; \Big\{ f \; d\varphi^1 \wedge d\varphi^2 \wedge \cdots \wedge d\varphi^m \;\Big|\; f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \Big\} \tag{VII.1}$$

Lemma VII.1. Seien $C = (U, \varphi), \widehat{C} = (\widehat{U}, \hat{\varphi}) \in \mathcal{A}$ mit $V = U \cap \widehat{U} \neq \emptyset$. Dann gilt für alle $q \in V$

$$d\hat{\varphi}^1(q) \wedge d\hat{\varphi}^2(q) \wedge \cdots \wedge d\hat{\varphi}^m(q) \;=\; \det[J(q)] \; d\varphi^1(q) \wedge d\varphi^2(q) \wedge \cdots \wedge d\varphi^m(q)\,, \tag{VII.2}$$

wobei

$$J(q) \;:=\; J_{\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}}[\varphi(q)] \;=\; \left(\frac{\partial[\hat{\varphi}^i \circ \varphi^{-1}](\xi)}{\partial \xi^j} \Big|_{\xi = \varphi(q)} \right)_{i,j=1,\ldots,m} . \tag{VII.3}$$

Beweis. Auf V gilt

$$d\hat{\varphi}^i \;=\; \sum_{\kappa=1}^m J_{i,\kappa} \, d\varphi^\kappa \,, \tag{VII.4}$$

also

$$\begin{aligned} d\hat{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{\varphi}^m \;&=\; \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} \frac{(-1)^\pi}{m!} \, d\hat{\varphi}^{\pi(1)} \otimes d\hat{\varphi}^{\pi(2)} \otimes \cdots \otimes d\hat{\varphi}^{\pi(m)} \\ &=\; \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} \frac{(-1)^\pi}{m!} \sum_{\kappa(1),\ldots,\kappa(m)=1}^m J_{\pi(1),\kappa(1)} \, J_{\pi(2),\kappa(2)} \cdots J_{\pi(m),\kappa(m)} \; d\varphi^{\kappa(1)} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{\kappa(m)} \\ &=\; \sum_{\kappa(1),\ldots,\kappa(m)=1}^m \frac{1}{m!} \, d\varphi^{\kappa(1)} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{\kappa(m)} \Bigg(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} (-1)^\pi \, J_{\pi(1),\kappa(1)} \cdots J_{\pi(m),\kappa(m)} \Bigg) . \end{aligned} \tag{VII.5}$$

Definieren wir,

$$v_1 := \begin{pmatrix} J_{1,1} \\ \vdots \\ J_{m,1} \end{pmatrix}, \ \ldots \ , v_m := \begin{pmatrix} J_{1,m} \\ \vdots \\ J_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \tag{VII.6}$$

so erkennen wir, dass

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} (-1)^\pi \, J_{\pi(1),\kappa(1)} \cdots J_{\pi(m),\kappa(m)} \ &= \ \det(v_{\kappa(1)}, v_{\kappa(2)}, \ldots, v_{\kappa(m)}) \qquad \text{(VII.7)} \\ &= \begin{cases} 0\,, & \text{falls } \{\kappa(1), \ldots, \kappa(m)\} \neq \mathbb{Z}_1^m, \\ (-1)^\kappa \det(J)\,, & \text{falls } \{\kappa(1), \ldots, \kappa(m)\} = \mathbb{Z}_1^m\,, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $(-1)^\kappa$ das Signum der Permutation $\kappa : \mathbb{Z}_1^m \to \mathbb{Z}_1^m$ ist. Also ist

$$\begin{aligned} d\hat{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{\varphi}^m \ &= \ \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_m} \frac{(-1)^\kappa}{m!} \det(J) \, d\varphi^{\kappa(1)} \otimes \cdots \otimes d\varphi^{\kappa(m)} \\ &= \ \det(J) \, d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^m\,. \end{aligned} \tag{VII.8}$$

□

Definition VII.2. Eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ heißt **orientierbar**

$$:\Leftrightarrow \quad \exists\, \Omega \in \bigwedge^{(m)}[M] \ \forall\, q \in M : \quad \Omega(q) \ \neq \ 0\,. \tag{VII.9}$$

Lemma VII.3. Sei $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $m \geq 2$. Dann ist $\mathcal{M} = (M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ genau dann orientierbar, wenn es einen mit $\mathcal{A}$ verträglichen Atlas $\widetilde{\mathcal{A}} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von M so gibt, dass für alle $C_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha), C_\beta = (U_\beta, \hat{\varphi}_\beta) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ auch

$$\forall\, q \in U_\alpha \cap U_\beta : \det J_{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}}[\varphi_\alpha(q)] \ > \ 0 \tag{VII.10}$$

gilt.

Beweis. $\underline{\Rightarrow:}$ Seien $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ orientierbar und $\Omega \neq 0$ eine nirgends verschwindende m-Form. Ist $C = (U, \varphi) \in \mathcal{A}$, so ist

$$\forall\, q \in U : \ \Omega(q) = g(q) \ d\varphi^1(q) \wedge \cdots \wedge d\varphi^m(q), \tag{VII.11}$$

wobei $g(q) \neq 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von φ und g ist entweder

$$(i) \ \forall q \in U : \ g(q) > 0 \quad \text{oder} \quad (ii) \ \forall q \in U : \ g(q) < 0. \tag{VII.12}$$

Im Fall (i) setzen wir $\widetilde{C}[C] := C$, im Fall (ii) vertauschen wir die Koordinaten $\xi^1 = \varphi^1(q)$ und $\xi^2 = \varphi^2(q)$, d.h. wir setzen $\widetilde{C}[C] := (\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ mit $\widetilde{U} := U$ und

$$\big(\hat{\varphi}^1, \hat{\varphi}^2, \hat{\varphi}^3, \ldots, \tilde{\hat{\varphi}}^m\big) \ := \ \big(\varphi^2, \varphi^2, \varphi^3, \ldots, \varphi^n\big)\,. \tag{VII.13}$$

So erhalten wir einen Atlas

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \left\{ \widetilde{C}[C] \;\middle|\; C \in \mathcal{A} \right\}, \tag{VII.14}$$

sodass

$$\forall \widetilde{C} = (\widetilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \widetilde{\mathcal{A}},\ q \in \widetilde{U}: \quad \Omega(q) \;=\; g(q)\, d\tilde{\varphi}^1(q) \wedge \cdots \wedge d\tilde{\varphi}^m(q),\ g(q) > 0. \tag{VII.15}$$

Seien $\tilde{\phi} = (\widetilde{U}, \tilde{x})$, $\hat{\phi} = (\hat{U}, \hat{x})$ mit $\widetilde{U} \cap \hat{U} \neq \emptyset$ und $q \in \widetilde{U} \cap \hat{U}$. Danach ist

$$\Omega(q) \;=\; \tilde{g}(q)\;\; d\tilde{\varphi}^1(q) \wedge \cdots \wedge d\tilde{\varphi}^m(q), \quad \tilde{g}(q) > 0. \tag{VII.16}$$

$$\Omega(q) \;=\; = \hat{g}(q)\;\; d\hat{v}phi^1(q) \wedge \cdots \wedge d\hat{v}phi^m(q),\ \hat{g}(q) > 0. \tag{VII.17}$$

Nach Lemma VII.1 ist dann

$$\tilde{g}(q) = \hat{g}(q) \det\left(J_{\hat{x}\circ\tilde{x}^{-1}}(\tilde{x}(q)) \right), \tag{VII.18}$$

d.h.

$$\det\left(J_{\hat{x}\circ\tilde{x}^{-1}}(\tilde{x}(q)) = \frac{\tilde{g}(q)}{\hat{g}(q)} > 0. \tag{VII.19}$$

$\underline{\Leftarrow}$: Seien $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha = (U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ ein Atlas von M mit $\det\left(J^{(\alpha,\beta)}\right) > 0$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$, wobei

$$J^{(\alpha,\beta)}(q) := J_{x_\alpha\circ x_\beta^{-1}}(x_\beta(q)) \tag{VII.20}$$

und $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ eine lokal endliche Partition der Eins, d.h. für alle $q \in M$ und $\alpha \in J$ gilt

$$0 \le \chi_\alpha \le 1, \quad \mathrm{supp}\chi_\alpha \subset U_\alpha, \quad \sum_{\alpha\in J} \chi_\alpha(q) = 1, \tag{VII.21}$$

$$\#\{\beta \in J \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\} < \infty. \tag{VII.22}$$

Wir wählen nun (unter Verwendung des Auswahlaxioms) eine Abbildung $\alpha_0 : M \to J$, sodass

$$\forall q \in M: \;\; \chi_{\alpha_0(q)}(q) > 0. \tag{VII.23}$$

Wir setzen nun für $q \in M$

$$\Omega(q) := \sum_{\alpha\in J} \chi_\alpha(q)\;\; dx_{\alpha,1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha,m}(q) \tag{VII.24}$$

wobei die Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden enthält. Dann ist $\Omega \in \bigwedge^{(m)}[M]$ und für alle $q \in M$ ist

$$\Omega(q) = g(q)\;\; dx_{\alpha_0(q),1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_0(q),m}(q), \tag{VII.25}$$

wobei gemäß Lemma VII.1

$$g(q) = \sum_{\alpha\in J} \chi_\alpha(q)\;\; \det\left(J^{(\alpha,\alpha_0(q))}(q) \right) \ge \chi_{\alpha_0(q)}(q) > 0. \tag{VII.26}$$

$\square$

Bemerkungen und Beispiele.

- Für $M \subset \mathbb{R}^m$ offen mit der Karte (M, id_M) ist

$$\forall x \in M: \ \Omega(x) := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \neq 0, \tag{VII.27}$$

  und M ist orientierbar.

- Das Möbiusband ist nicht orientierbar, da sich die lokal gegebene 2-Form $dx \wedge dy$ nicht stetig zu einer globalen 2-Form zusammensetzen lässt.

Definition VII.4. Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}$ und m-Form $\Omega \in \bigwedge^{(m)}[M]$ und Atlas $\{\phi_\alpha = (U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in J}$, sodass

$$\forall \alpha \in J, q \in U_\alpha: \ \Omega(q) = g_\alpha(q) \ dx_{\alpha,1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha,m}(q), \quad g_\alpha(q) > 0. \tag{VII.28}$$

Sei weiterhin $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ eine lokal endliche Partition der Eins. Für $f \in C_0(M, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion auf M mit kompaktem Träger ist das **Integral von $f \cdot \Omega$ über M** definiert durch

$$\int_M f(q)\Omega(q) := \sum_{\alpha \in J} \int_{\mathbb{R}^m} (\chi_\alpha \cdot f \cdot g_\alpha)((x_\alpha)^{-1}(x)) \ dx^m. \tag{VII.29}$$

Bemerkungen und Beispiele.

- Das Integral (VII.29) ist kartenunabhängig.
- Im Folgenden verwenden wir den Halbraum $\mathbb{H}^m$ und seinen Rand $\partial\mathbb{H}^m$:

$$\mathbb{H}^m := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0\}, \tag{VII.30}$$

$$\partial\mathbb{H}^m := \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}. \tag{VII.31}$$

Definition VII.5. Seien $(M, \mathfrak{T})$ ein metrisierbarer, separabler topologischer Raum und $m \in \mathbb{N}$.

(i) Sind $U \in \mathfrak{T}$ und $x : U \to x(U) \subset \mathbb{H}^m$ ein Homeömorphismus, so bezeichnen wir $\phi = (U, x)$ als **berandete Karte (von M)**.

(ii) Zwei berandete Karten $\phi = (U, x)$, $\hat{\phi} = (\hat{U}, \hat{x})$ heißen **verträglich** : $\Longleftrightarrow$

$$\Big\{ V := U \cap \hat{U} \neq \emptyset \Rightarrow \tag{VII.32}$$
$$\hat{x} \circ x^{-1} \in C^\infty(x(V), \hat{x}(V))$$
$$x \circ \hat{x}^{-1} \in C^\infty(\hat{x}(V), x(V)). \Big\}$$

(iii) Eine Familie $\mathcal{A}$ berandeter Karten heißt **berandeter Atlas (von M)** : $\Longleftrightarrow$

$$\forall \phi, \hat{\phi} \in \mathcal{A}: \ \phi \text{ und } \hat{\phi} \text{ sind verträglich} \tag{VII.33}$$

$$M = \bigcup_{(U,x) \in \mathcal{A}} U. \tag{VII.34}$$

(iv) Zwei berandete Atlanten $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ von M heißen **verträglich** $: \Longleftrightarrow$

$$\forall \phi \in \mathcal{A}, \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{A}}: \ \phi \text{ und sind verträglich} \tag{VII.35}$$

(v) Ist $\mathcal{A}$ ein berandeter Atlas von M, so nennt man die Äquivalenzklasse $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ bezüglich verträglichen berandeter Atlanten eine **berandete Mannigfaltigkeit**

(vi) Ist $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine berandete Mannigfaltigkeit so nennen wir

$$\partial M := \bigcup_{(U,x)\in\mathcal{A}} x^{-1}(x(U) \cap \partial \mathbb{H}^m) \tag{VII.36}$$

den **Rand von M**.

Bemerkungen und Beispiele.

- Ist $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$ die Nordhalbkugel, so wählen wir

$$\begin{aligned} U_{x,+} &:= \{(x, y, z) \in M \mid x > 1/2\}, \\ U_{x,-} &:= \{(x, y, z) \in M \mid x < -1/2\}, \\ U_{y,+} &:= \{(x, y, z) \in M \mid y > 1/2\}, \\ U_{y,-} &:= \{(x, y, z) \in M \mid y < -1/2\}, \\ U_z &:= \left\{(x, y, z) \in M \mid x^2 + y^2 < \frac{8}{10}\right\} \end{aligned} \tag{VII.37}$$

$$x_{x,\pm}(x, y, z) := (z, y), \quad x_{y,\pm}(x, y, z) = (z, x), \quad x_z(x, y, z) := (x, y). \tag{VII.38}$$

- Ist $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine berandete, m-dimensionale Mannigfaltigkeit $m \geq 2$, so ist ∂M eine randlose Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 1$, denn ∂M resultiert aus M durch Einschränkung der Kartenabbildungen x auf $x_1^{-1}(0)$ und die Bildbereiche $(x_2, \cdots, x_m)$ der Karten vom ∂M sind nicht auf den Halbraum $\mathbb{H}^{m-1}$ beschränkt.

Lemma VII.6. Sei $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine berandete und orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 2$. Dann ist auch ∂M orientierbar.

Beweis. Seien $\phi = (U, x)$, $\hat{\phi} = (\hat{U}, \hat{x})$ zwei berandete Karten von M, $q \in U \cap \hat{U} \cap \partial M$ und

$$\det J(q) > 0, \tag{VII.39}$$

wobei $J = J_{\hat{x}\circ x^{-1}} \circ x$, d.h.

$$J_{k,l}(q) = \frac{\partial(\hat{x}_k \circ x^{-1})(y)}{\partial x_l}\bigg|_{y=x(q)}, \tag{VII.40}$$

die Jacobi-Matrix von $\hat{x} \circ x^{-1}$ ist. Wir können O.B.d.A. $\hat{x}(q) = x(q)$ annehmen. Mit $y = (y_1, \ldots, y_m)$ is dann nach dem Satz von Taylor

$$\hat{x}_1 \circ x^{-1}(y) = \sum_{l=1}^{m} J_{1,l}(q) y_l + O(y^2). \tag{VII.41}$$

Für $y_1 = 0$ und $\|y\|^2$ genügend klein ist $x^{-1}(y) \in \partial M$ also

$$0 = \hat{x}_1[x^{-1}(0)] = \sum_{l=2}^{m} J_{1,l}(q) y_l + o(y^2). \tag{VII.42}$$

Mit $y = \varepsilon \cdot e_l$, $l \in \mathbb{Z}_2^m$ und $|\varepsilon| << 1$ folgt daraus

$$J_{1,2}(q) = J_{1,3}(q) = \cdots = J_{1,m}(q) = 0. \tag{VII.43}$$

Für $y_1 > 0$, $y_2 = \cdots = y_m = 0$, $y_1^2 << 1$ ist andererseits $x^{-1}(y) \in M \setminus \partial M$, also

$$0 < \hat{x}_1[x^{-1}(y)] = J_{1,1}(q) y_1 + O(y_1^2), \tag{VII.44}$$

woraus wir

$$J_{1,1}(q) > 0 \tag{VII.45}$$

erhalten. Daher nimmt $J(q)$ die folgende Blockform an

$$J(q) = \left(\begin{array}{c|ccc} J_{1,1}(q) > 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline J_{2,1}(q) & J_{2,2}(q) & \cdots & J_{2,m}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{m,1}(q) & J_{m,2}(q) & \cdots & J_{m,m}(q) \end{array} \right), \tag{VII.46}$$

und mit

$$\widetilde{J}(q) := \begin{pmatrix} J_{2,2}(q) & \cdots & J_{2,m}(q) \\ \vdots & & \vdots \\ J_{m,2}(q) & \cdots & J_{m,m}(q) \end{pmatrix}, \tag{VII.47}$$

folgt, dass

$$\det \widetilde{J}(q) = \frac{\det J(q)}{J_{1,1}(q)} > 0. \tag{VII.48}$$

Da M orientierbar ist, existiert ein Atlas so dass $\det J_{\hat{x} \circ x^{-1}} > 0$ für alle $\phi = (U, x)$, $\hat{\phi} = (\hat{U}, \hat{x}) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$. Damit gilt $\det J_{\tilde{\hat{x}} \circ \tilde{x}^{-1}} > 0$ auch für den Atlas von ∂M, den wir durch Projektion von $\hat{x}$ und x auf die 2-m Komponenten gewinnen, und ∂M ist ebenfalls orientierbar.

$\square$

Satz VII.7 (Stokes)**.** Seien $m \geq 2$, $(M, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ eine berandete, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\omega \in \bigwedge^{(m-1)}[M]$ eine $(m-1)$- Form mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{VII.49}$$

Beweis. Seien zunächst $\mathrm{supp}(\omega) \subset U$ und $\phi = (U, x) \in \mathcal{A}$ eine berandete Karte von M. Mit $\tilde{x}_1 := x_2$, $\tilde{x}_2 := x_3, \ldots, \tilde{x}_{m-1} := x_m$ und $\widetilde{U} := U \cap \partial M$ ist dann $\tilde{\phi} = (\widetilde{U}, \tilde{x})$ die entsprechend induzierte Karte von ∂M. Seien weiterhin $\omega_j \in C^\infty(U; \mathbb{R})$, sodass für $q \in U$

$$\omega(q) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(q)\ dx_1(q) \wedge \cdots \wedge dx_{j-1}(q) \wedge dx_{j+1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_m(q). \tag{VII.50}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} d\omega(q) &= \sum_{j=1}^{m} d\omega_j(q) \wedge dx_1(q) \wedge \cdots \wedge dx_{j-1}(q) \wedge dx_{j+1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_m(q) \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial \omega_j \circ x^{-1}(y)}{\partial x_k}\Big|_{y=x(q)}\ dx_k(q) \wedge \cdots \wedge dx_{j-1}(q) \wedge dx_{j+1}(q) \wedge \cdots \wedge dx_m(q) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j \circ x^{-1}(y)}{\partial x_j}\Big|_{y=x(q)}\ dx_1(q) \wedge \cdots \wedge dx_m(q) \end{aligned} \tag{VII.51}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_U d\omega &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}^m} \frac{\partial(\omega_j \circ x^{-1})}{\partial x_j}(y)\ d^m y = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_m \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial(\omega_1 \circ x^{-1})(y)}{\partial x_1} dy_1 \right\} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m} \int_0^\infty dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots dy_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_m \qquad \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(\omega_j \circ x^{-1})(y)}{\partial x_j} dy_j \right\}}_{=\omega_j \circ x^{-1}(y_1, \cdots, y_j = +\infty, \cdots, y_m) - \omega_j \circ x^{-1}(y_1, \cdots, y_j = -\infty, \cdots, y_m) = 0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots dy_m\ \omega_1 \circ x^{-1}(0, y_2, \cdots, y_m) = \int_{\partial M \cap U} \omega_1(q)\ d\tilde{x}_1(q) \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{m-1}(q) \\ &= \int_{\partial M \cap U} \omega, \end{aligned} \tag{VII.52}$$

da

$$\omega(q)\Big|_{\partial M} = \omega_1(q)\ d\tilde{x}_1(q) \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{m-1}(q). \tag{VII.53}$$

□

Literaturverzeichnis

[1] T. Aubin. *A Course in Differential Geometry*. AMS Publications, 2001.

[2] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. Springer, Berlin, 1995.