

I. Stochastik :

2. Diskrete stochastische Modelle

Ω = Grundmenge, $\omega \in \Omega$ Ergebnisse

$A \subseteq \Omega$ Ereignis, $\{\omega\} \subseteq \Omega$ Elementarereignis.

Axiome:

(i) $\forall A \subseteq \Omega : P(A) \geq 0$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) $\forall A, B \subseteq \Omega, A \cap B = \emptyset :$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bsp.:

• Würfelwurf: $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\omega = 2 \leftrightarrow$ eine „2“ wird gewürfelt

$A = \{2; 4; 6\} \leftrightarrow$ eine gerade Augenzahl wird gewürfelt.

- Wurf von zwei Würfeln: (schwarzer + weißer Würfel)

$$\Omega_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{schwarz}}}{\Omega_1} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weiß}}}{\Omega_1} = \{ (a; b) \mid a \in \Omega_1, b \in \Omega_1 \}$$

$$= \{ (1; 1); (1; 2); \dots; (1; 6); \\ (2; 1); (2; 2); \dots; (2; 6); \dots \\ \dots; (6; 1); (6; 2); \dots; (6; 6) \}$$

$$|\Omega_1| = 6 \Rightarrow |\Omega_2| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_1| = 36$$

$A =$ „Würfeln eines Paschs“

$$= \{ (1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5); (6; 6) \}$$

- Münzwurf (1 Münze): $\Omega_1 = \{ K(\text{opf}), Z(\text{ahl}) \}$

möglich sind vier Ereignisse

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{ K \}, A_3 = \{ Z \}, A_4 = \{ K; Z \}$$

Münzwurf von N Münzen

$$\Omega_N = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_1$$

$$= \{ (a_1, a_2, \dots, a_N) \mid a_1, a_2, \dots, a_N \in \Omega_1 \}$$

$$|\Omega_N| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_1| \dots |\Omega_1| = |\Omega_1|^N = 2^N$$

Regeln (folgen aus Axiom (i) - (iii)) :

$$\forall A \subseteq B : P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$$

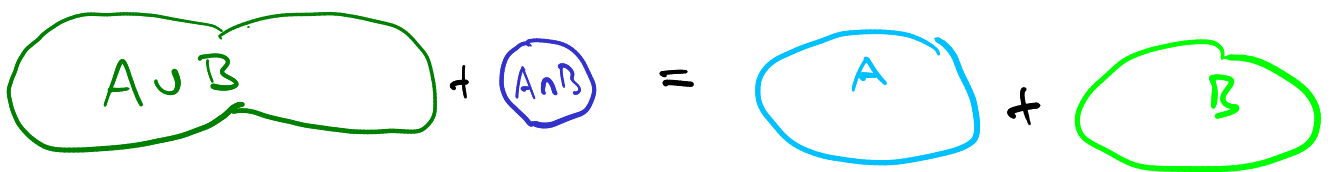
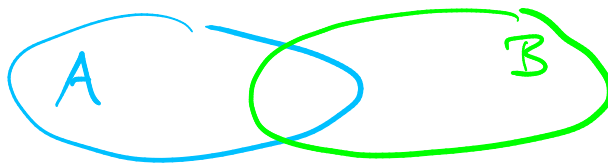
$$\forall A \subseteq B : P(A) \leq P(B),$$

$$\forall A \subseteq \Omega : P(\mathcal{C}_{\Omega}(A)) = 1 - P(A),$$

$$\text{wobei } \mathcal{C}_{\Omega}(A) = \Omega \setminus A.$$

$$\forall A, B \subseteq \Omega :$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



3. Laplace - Experimente :

Annahme : Alle Elementarereignisse
haben dieselbe Wahrscheinlichkeit

$$\text{Also: } \Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_N\}$$

$$\Rightarrow |\Omega| = N.$$

$$\underline{\text{Ann.}} \Rightarrow P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) \\ = \dots = P(\{\omega_N\})$$

Außerdem sind $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$, für $i \neq j$. Deshalb ist

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_N\}) \\ = N \cdot P(\{\omega_1\})$$

$$\Rightarrow P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{N} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}_1^N: P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$$

$$\forall A \subseteq \Omega: P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Bsp.: (Fairer) Würfel: $\Omega = \{1; \dots; 6\} \Rightarrow |\Omega| = 6$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ist gerade}\} = \{2; 4; 6\}$$

$$\Rightarrow |A| = 3, \quad |\Omega| = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

• Wurf von zwei Würfeln: $|\Omega| = 36$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ist ein Pasch}\}$$

$$\Rightarrow A = \{(1;1); \dots; (6;6)\} \Rightarrow |A| = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Frage: Wie berechnet man W-keiten
beim n -fachen Würfeln?

Kombinatorik von Urnenmodell

Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Es sind
 n unterscheidbare (z.B. mit Aufschrift
„1“, „2“, ..., „n“ durchnummern)

Kugeln in einer Urne, von denen
jedes k Kugeln mit verbundenen
Seilen gezogen werden.

	mit Wdh. (mit Zurücklegen)	ohne Wdh. (ohne Zurücklegen)
mit Reihenfolge (Permutationen)	$ \Omega_{PnW} = n^k$ „Zahlenschloss“	$ \Omega_{PnW} = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge (Kombinationen)	X	$ \Omega_{KnW} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ „Lotto, Gauss 49“

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{Binomialkoeff.},$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \geq 1, \quad 0! := 1$$

k-facher Würfelwurf:

Jedes Mal haben wir $n=6$ Möglichkeiten (statt Würfeln ziehen wir eine Kugel aus einer Urne mit 6 Kugeln), und es kommt auf die Reihenfolge an (weil die Würfel unterscheidbar sind).

$\Rightarrow$ Anzahl der Mögl.:

$$|\Omega_{k\text{-facher Würfelwurf}}| = 6^k$$

k-facher Münzwurf: $n=2$,

$p = \text{W-keit für "K"} \in (0,1)$,

$1-p = \text{W-keit für "Z"} \in (0,1)$.

faire Münze $\Rightarrow p = 1-p = \frac{1}{2}$.

$|\Omega_{k\text{-fachen Münzwurf}}| = 2^k$, aber kein Laplace-Experiment, da nicht alle Elementarereignisse dieselbe W-Keit haben.

Binomialverteilung: $n=2$, k Münzwürfe,

$$\Omega = \{ (a_1, \dots, a_k) \mid a_1, \dots, a_k \in \{0, 1\} \}$$

↑ Zahl ↑ Kopf

Für $l \in \mathbb{Z}_0^k$ seien

$$\Omega_l := \{ (a_1, \dots, a_k) \mid a_j \in \{0, 1\}, a_1 + a_2 + \dots + a_k = l \}$$

$= \{ k\text{-fachen Münzwürfe mit jeweils } l\text{-mal Kopf und } (k-l)\text{-mal Zahl} \}$

$$\Rightarrow \Omega = \bigcup_{l=0}^k \Omega_l, \quad \forall l < l': \Omega_l \cap \Omega_{l'} = \emptyset$$

Ist die Münze fair, so liegt ein Laplace-Experiment vor, und wir erhalten

$$P(\Omega_l) = \frac{|\Omega_l|}{|\Omega|} = \binom{k}{l} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{k}{l} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-l}}$$

Ist die Münze nicht fair, so ist

$$P(\Omega_l) = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}$$

Bsp.: Bei 4-fachem Wurf einer fairen Münze soll mindestens 3-mal „Kopf“ resultieren. Wie groß ist die W-kht dieses Ereignisses, das wir mit A bez.?

$$k=4, \quad l_1=3, \quad l_2=4, \quad A = \Omega_{l_1} \cup \Omega_{l_2}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(\Omega_{l_1}) + P(\Omega_{l_2})$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{1}{16} \left[\frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{4! \cdot 0!} \right]$$

$$= \frac{1}{16} [4 + 1] = \frac{5}{16}$$

Bsp.: Wie groß ist die W-kht. bei einem 3-fachem Würfelwurf mindestens eine „6“ zu werfen, was wir als Ereign. B bez.?

Modellierung mit unfairer Münze:

$$p = \text{W-kht eine „6“ zu werfen} = \frac{1}{6},$$

$$1-p = \text{W-kht. eine „1“, „2“, „3“, „4“, „5“ zu werfen} = \frac{5}{6}$$

$$k=3, \quad l_1=1, \quad l_2=2, \quad l_3=3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) &= P(\Omega_{l_1}) + P(\Omega_{l_2}) + P(\Omega_{l_3}) \\ &= P(\Omega_1) + P(\Omega_2) + P(\Omega_3) \end{aligned}$$

$$= \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\ + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$= \left(\frac{3!}{1! \cdot 2!}\right) \cdot \frac{5^2}{6^3} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{5}{6^3} \\ + \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{1}{6^3}$$

$$= \frac{1}{6^3} (3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1)$$

$$= \frac{91}{216} = 42,1 \%$$