

IX. Vektorgeometrie

IX.1 Geraden

Punktmenge $g = \{ (x, mx+b) \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

$m \in \mathbb{R}$ Steigung, $b \in \mathbb{R}$ absolutes Glied

übliche Schreibweise:

$g: y = mx + b$ Steigungsform (A)

(B) 2-Pkteform: Zwei voneinander versch.
Pkte. $P_1 = (x_1; y_1) \neq P_2 = (x_2; y_2)$ sind
durch genau eine Gerade verbunden.

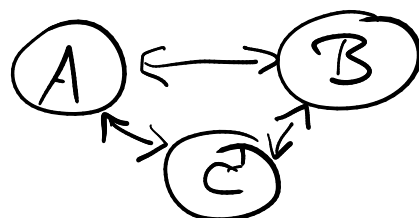
(C) Punkt-Richtgsform:

$$g = \left\{ (x(t), y(t)) \mid \begin{aligned} x(t) &= m_x t + b_x, \\ y(t) &= m_y t + b_y, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}$$

$$= \{ (m_x t + b_x, m_y t + b_y) \mid t \in \mathbb{R} \},$$

wobei $m_x^2 + m_y^2 > 0$, $b_x, b_y \in \mathbb{R}$.

Satz: Die Darstellungsformen (A), (B) und (C)
sind gleichwertig.



Bsp ① → ③: Sind $m=3$ und $b=5$, so
 wählen wir $x_1 := 0$, $x_2 := 1$. Dann sind
 $y_1 = m x_1 + b = 3 \cdot 0 + 5 = 5$,
 $y_2 = m x_2 + b = 3 \cdot 1 + 5 = 8$,
 $\Rightarrow P_1 = (0; 5)$, $P_2 = (1; 8)$.

Bsp ③ → ④: Sind $P_1 = (0; 5)$, $P_2 = (1; 8)$,
 so legen wir fest dass

$$0 = x_1 \stackrel{!}{=} x(0) = m_x \cdot 0 + b_x = b_x,$$

$$5 = y_1 \stackrel{!}{=} y(0) = m_y \cdot 0 + b_y = b_y,$$

$$\text{d.h. } b_x = 0, b_y = 5.$$

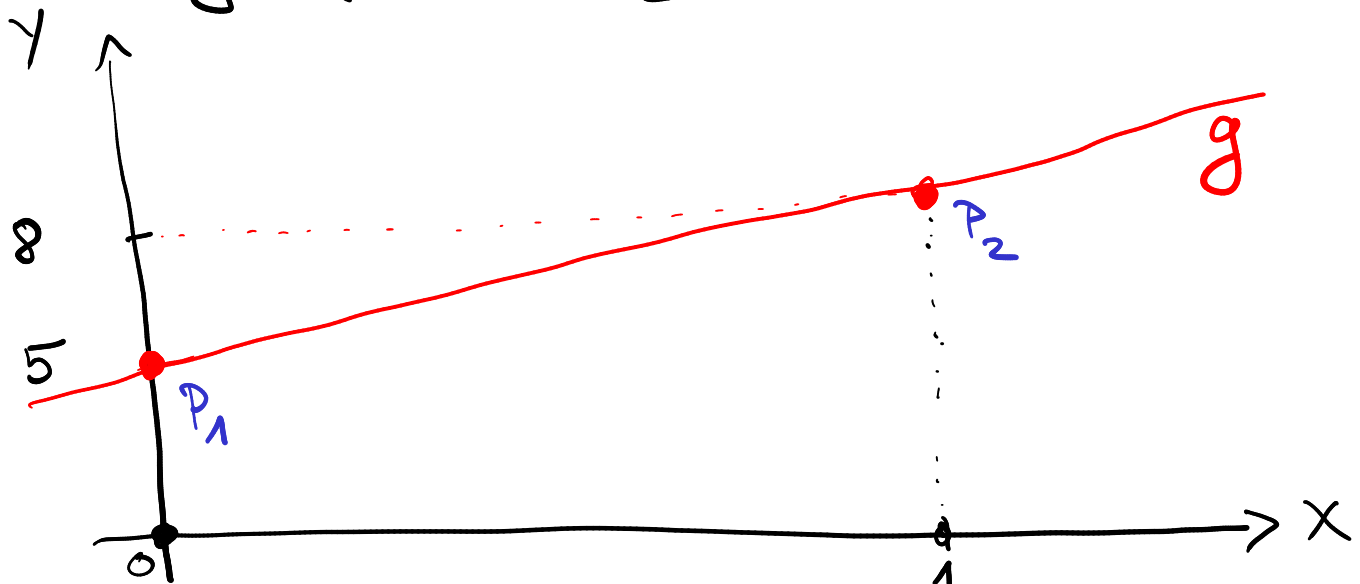
Wählen wir

$$1 = x_2 = x(2) = m_x \cdot 2 + b_x = 2m_x,$$

$$8 = y_2 = y(2) = m_y \cdot 2 + b_y = 2m_y + 5,$$

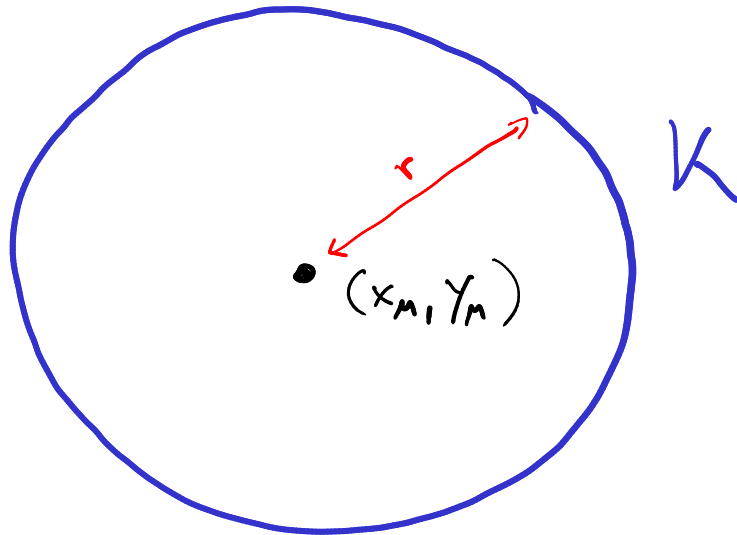
$$\Rightarrow m_x = \frac{1}{2}, m_y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow g = \left\{ \left(\frac{1}{2}t; \frac{3}{2}t + 5 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$



11.2 Kreise (A)

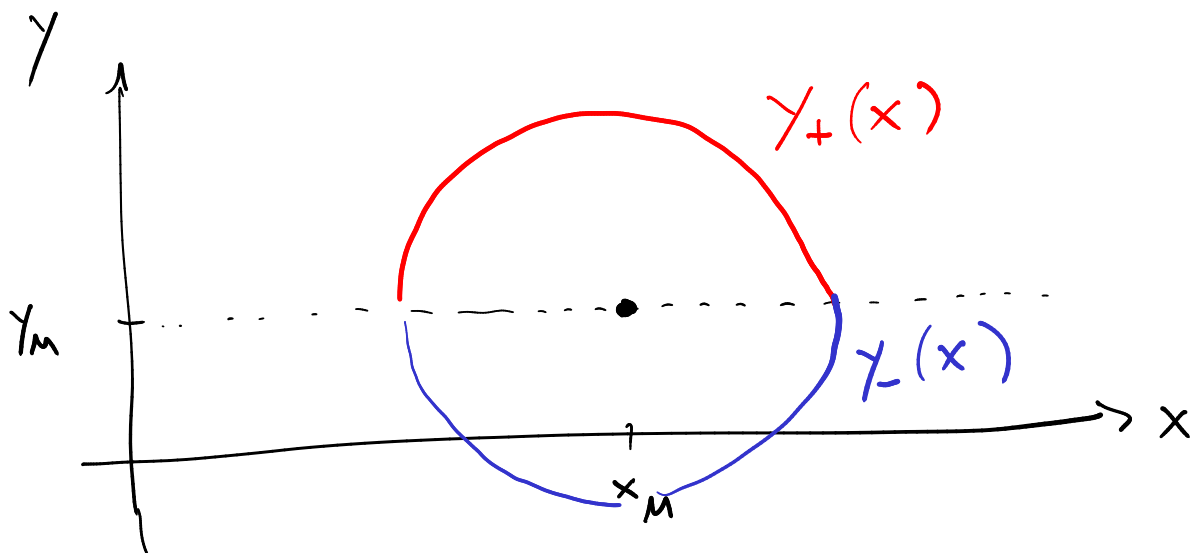
$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \}$,
wobei $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ der Mittelpunkt und
 $r > 0$ der Radius des Kreises K sind.



(B) K als Graph zweier Fkten:
 $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ auflösen nach y !

$$\Leftrightarrow (y - y_M)^2 = r^2 - (x - x_M)^2$$

$$\Rightarrow y_{\pm}(x) = y_M \pm \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$$

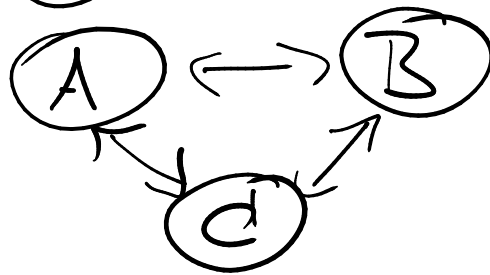


Ⓒ Winkeldarstellung:

$$K = \{ (x(\varphi), y(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$\left. \begin{aligned} x(\varphi) &= x_M + r \cdot \cos(\varphi), \\ y(\varphi) &= y_M + r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

Satz: Ⓐ, Ⓑ und Ⓒ sind gleichwertig.



Bestimmung des Schnittpkte zweier Kreise:

$$K_1 = \{ (x, y) \mid (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \},$$

$$K_2 = \{ (x, y) \mid (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \},$$

$K_1 \cap K_2 = ?$ [wird durch Lösung quadratisches Glns bestimmt, s. Kap. II]

Es können vier Fälle auftreten:

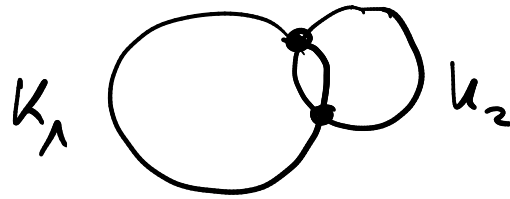
① Es gibt keine (0) Schnittpkte:



② Es gibt genau einen (1) Schnittpkt.



③ Es gibt genau zwei (2) Schnittpunkte:



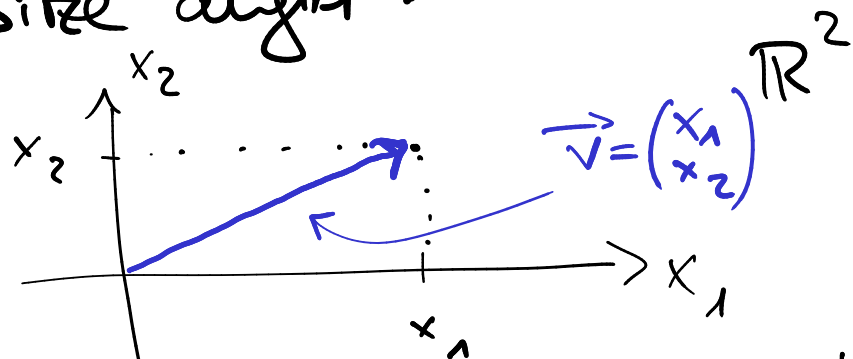
④ Es gibt unendlich viele (∞) Schnittpunkte:



IX.3 Vektorrechnung

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ oder

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren geschrieben, wobei der Fußpunkt von $\vec{v}$ der Ursprung ist und die Koordinaten die Pfeilspitze angibt:



• Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \\ x_3 + \alpha y_3 \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^3$$

- Länge des Vektors
= Abstand der Pfeilspitze zum Ursprung:

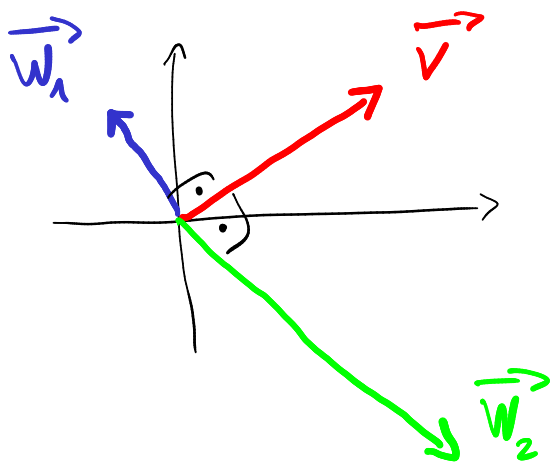
$$\mathbb{R}^2: |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\mathbb{R}^3: |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- Skalarprodukt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^2$
 $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$$\mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen senkrecht aufeinander
 $(\Leftrightarrow) \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$



$$\vec{v} \cdot \vec{w}_1 = \vec{v} \cdot \vec{w}_2 = 0$$

Außerdem ist $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

IX. 4 Geraden und Ebenen

Sind $O = (0; 0)$ und $P = (p_1; p_2) \in \mathbb{R}^2$

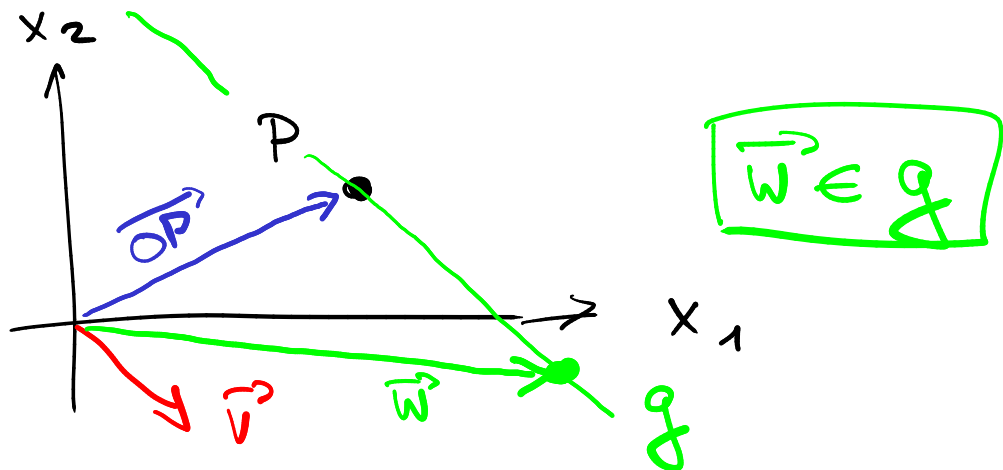
so ist $\overrightarrow{OP} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

des zugehörige Vektor. Ist

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer Vektor,
der nicht null ist, d.h. $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} > 0$,
so beschreibt

$$g = \{ \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

die Gerade in Richtung $\vec{v}$, die
durch P geht.



Dies geht auch mit 3 Koordinaten,

$$g_{P, \vec{z}} = \{ \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{z} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{Gerade im Raum}$$

mit $P = (p_1; p_2; p_3)$, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

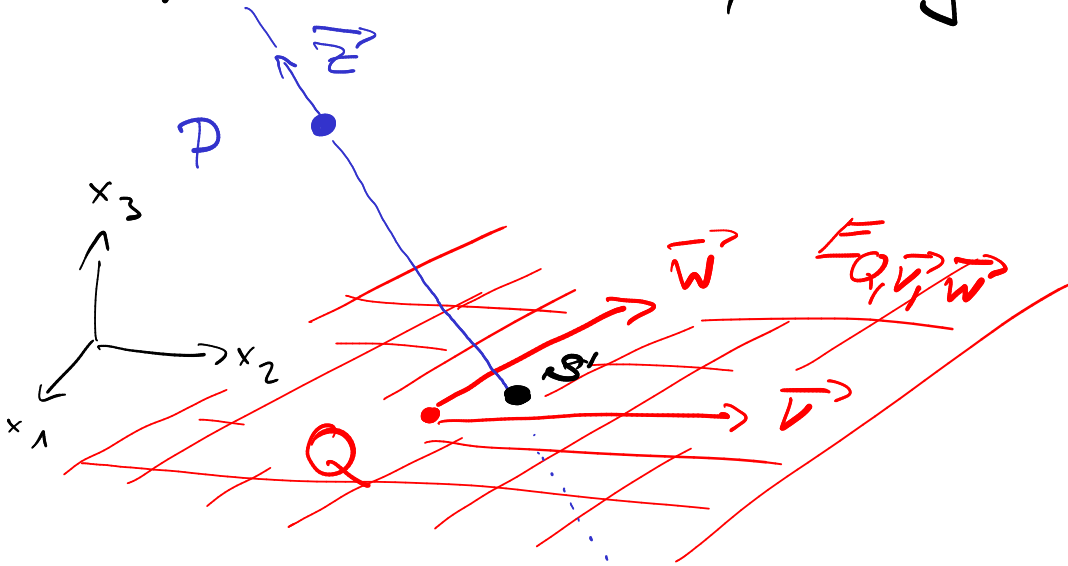
$$E_{Q, \vec{v}, \vec{w}} = \{ \overrightarrow{OQ} + \mu \vec{v} + \eta \vec{w} \mid \mu, \eta \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ebene im Raum mit

$$Q = (q_1; q_2; q_3), \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

und $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ und sind nicht parallel,

d.h. es gibt keine Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\alpha \vec{v} = \vec{w}$ oder $\vec{v} = \beta \vec{w}$ gälte.



Bestimmung von $S = (s_1; s_2; s_3)$ im Bsp.:

$$Q = (0; 0; 1), \quad P = (1; 0; 0),$$

$$\Rightarrow \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_{P, \vec{z}} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{Q, \vec{v}, \vec{w}} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \mu, \eta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ 1 + 2\eta \end{pmatrix} \mid \mu, \eta \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} := g_{P, \vec{z}} \cap E_{Q, \vec{v}, \vec{w}}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \mid \text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \text{und es gibt } \mu, \eta \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ 1+2\eta \end{pmatrix} \right\}$$

Für $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ gibt es also $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ so,
dann

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ 1+2\eta \end{pmatrix}$$

gilt.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-\lambda = \eta \\ -\lambda = \mu \\ \lambda = 1+2\eta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \eta = 1-\lambda = 1-(1+2\eta) \\ \quad = -2\eta \Rightarrow \eta = 0 \\ \Rightarrow \lambda = 1-\eta = 1 \\ \Rightarrow \mu = -\lambda = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$