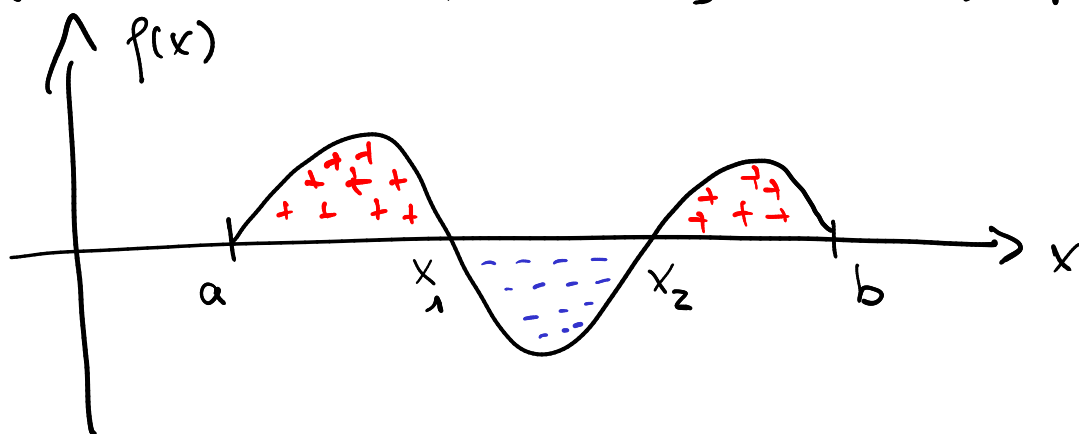


VIII. Integralrechnung

Geht stets $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$



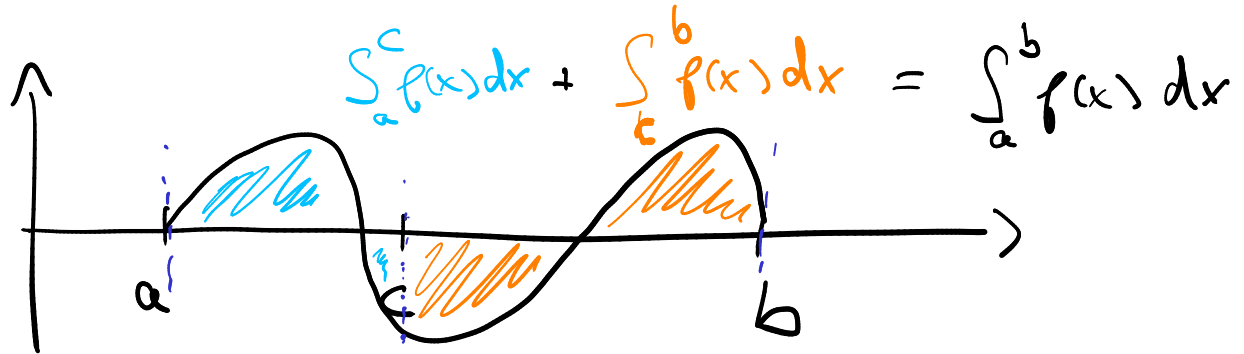
Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist die Fläche zwischen der Kurve von f und der x -Achse, wobei Flächenanteile oberhalb der x -Achse positiv gezählt werden und unterhalb negativ.

- Die genaue Definition des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ erfolgt mit Hilfe von Untersummen und Obersummen - wir kommen am Schluss darauf zurück.

Eigenschaften des Integrals

- Ist $c \in (a; b)$, so ist

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$



- Das Integral ist linear, d.h. für $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + \lambda g)(x) dx &= \int_a^b \{f(x) + \lambda \cdot g(x)\} dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \lambda \cdot \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Seien jetzt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ fest gewählt und dann noch $a', b' \in (a; b)$ mit $a' < b'$, also $a < a' < b' < b$, $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

1. Ist F auf $(a'; b')$ differenzierbar und die Ableitung F' auf $(a'; b')$ stetig, so gilt

$$\int_{a'}^{b'} F'(x) dx = F(b') - F(a').$$

2. Seien $f: [a'; b'] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$F' = f$ auf $(a'; b')$. Dann gilt

$$\int_{a'}^{b'} f(x) dx = F(b') - F(a').$$

- Eine solche Fkt F , für die $F' = f$ gilt, nennt man Stammfunktion von f .

- Stammfkten sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt:

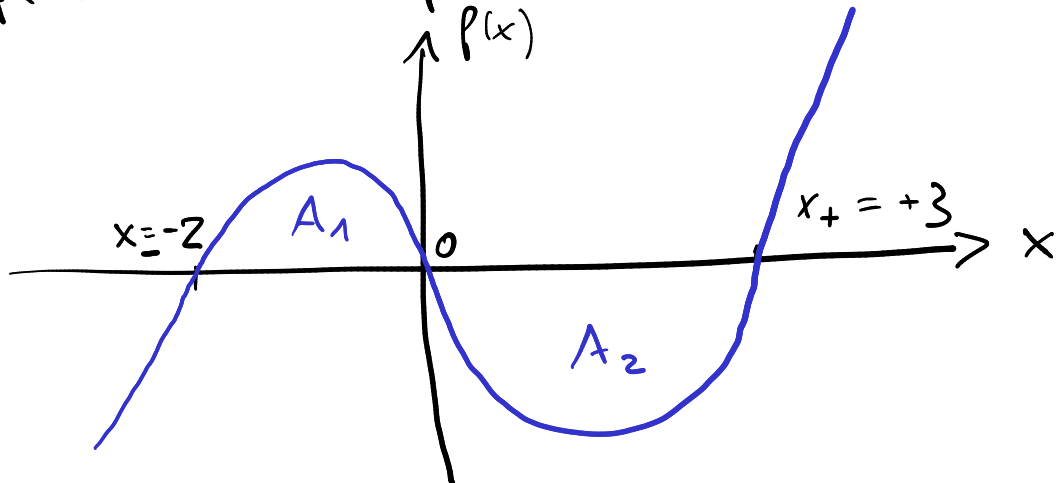
Ist F eine Stammfkt. von f , so ist auch $F + \text{const}$ eine Stammfkt von f , für jede Konstante $\text{const} \in \mathbb{R}$, denn

$$(F + \text{const})' = F' + (\text{const})' = F'$$

$f(x)$	Stammfkt.	Def. bereich	Bem.
α	$\alpha \cdot x$	$\mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}_0$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
x^β	$\frac{1}{\beta+1} \cdot x^{\beta+1}$	$\mathbb{R}^+$	$\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin(\alpha x)$	$-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$	$\mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\cos(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha x)$	$\mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bsp. 1: Berechne die Fläche zwischen Kurve und x-Achse zwischen den Nullstellen für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^3 - x^2 - 6x$.

Beob.: $f(0) = 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$.



Best. der Nullstellen $x_{\pm} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_{\pm}) = x_{\pm}^3 - x_{\pm}^2 - 6x_{\pm} \\ &= x_{\pm}(x_{\pm}^2 - x_{\pm} - 6) \end{aligned}$$

da $x_{\pm} \neq 0$, muss $x_{\pm}^2 - x_{\pm} - 6 = 0$ gelten

p-q-Formel mit $p = -1$, $q = -6$

$$\Rightarrow x_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x_- = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2, \quad x_+ = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

Wir verwenden im Weiteren die Notation

$$[g(x)]_a^b := g(b) - g(a)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx \\ &= \int_{-2}^0 x^3 dx - \int_{-2}^0 x^2 dx - 6 \cdot \int_{-2}^0 x dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 - 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 \\ &= \left(0 - \frac{(-2)^4}{4} \right) - \left(0 - \frac{(-2)^3}{3} \right) - 6 \left(0 - \frac{(-2)^2}{2} \right) \\ &= -4 - \frac{8}{3} + 12 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx \\ &= - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 6 \cdot \frac{3^2}{2} \right) = - \frac{81}{4} + 9 + 27 \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $\frac{16}{3} + \frac{63}{4}$.

Bsp 2: Berechne $I = \int_1^5 \frac{2x+1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 \frac{2x+1}{x^2} dx = \int_1^5 \left(\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \cdot \int_1^5 x^{-1} dx + \int_1^5 x^{-2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 2 \cdot [\ln(x)]_1^5 + \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^5 \\
&= 2 \cdot [\ln(x)]_1^5 + \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_1^5 \\
&= 2(\ln(5) - \ln(1)) + \left(-\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\frac{5}{1}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \ln(5) + \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Bsp 3: $J = \int_0^1 x \cdot e^{-5x^2} dx$

Versuche die Stammfkt v. $x \cdot e^{-5x^2} =: f(x)$ zu raten.

1. Versuch: $F_1(x) := e^{-5x^2} = h[g(x)]$, $h(y) = e^{-y}$, $g(x) = x^2$

Kettenregel
 $\Rightarrow F_1'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = (-e^{-y})|_{y=g(x)} \cdot (5 \cdot 2 \cdot x)$
 $= -10x \cdot e^{-5x^2}$

2. Versuch: $F_2(x) := \frac{F_1(x)}{-10} = -\frac{e^{-5x^2}}{10}$

$\Rightarrow F_2'(x) = \left(\frac{1}{-10}\right) \cdot F_1'(x) = x \cdot e^{-5x^2} = f(x) \checkmark$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J &= [F_2(x)]_0^1 = \left[-\frac{1}{10} \cdot e^{-5x^2} \right]_{x=0}^1 \\
&= \left(-\frac{1}{10} \cdot e^{-5 \cdot 1} \right) - \left(-\frac{1}{10} \cdot e^{-5 \cdot 0} \right) = \frac{1}{10} - \frac{e^{-5}}{10}
\end{aligned}$$

Definition des Integrals mit Ober- und Untersummen:

Wir bezeichnen

eine endliche Teilmenge von $(a; b)$

$$P = \{x_1; x_2; \dots; x_L\} \subseteq (a; b)$$

als Partition von $(a; b)$, wobei wir

o.B.d.A. $a < x_1 < x_2 < \dots < x_L < b$ annehmen.

Ist $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so können wir bilden ($x_0 := a, x_{L+1} := b$)

$$\underline{J}(f; P) = \sum_{\ell=0}^L (x_{\ell+1} - x_{\ell}) \cdot \min_{x_{\ell} \leq x \leq x_{\ell+1}} \{f(x)\}$$

$$\overline{J}(f; P) = \sum_{\ell=0}^L (x_{\ell+1} - x_{\ell}) \cdot \max_{x_{\ell} \leq x \leq x_{\ell+1}} \{f(x)\}$$

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ erhält man durch einen Grenzwertprozess, bei dem die Partition immer mehr Punkte enthält, die das Intervall $(a; b)$ immer dichter ausfüllen:

