

Kap VI : Elementare Fkten

$f: D \rightarrow W$ jedem Element aus der Menge D (Definitionsbereich) wird genau ein Element der Menge W (Wertebereich) zugeordnet. D.h.

Jedem $x \in D$ wird genau ein $f(x) \in W$ zugeordnet, aber es kann durchaus derselbe Funktionswert $f(x) = f(x') \in W$ für mehrere $x, x' \in D$ angenommen werden.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$, dann ist $f(-2) = 4 = f(2)$.

• Bestimmung des (größtmöglichen) Definitionsbereichs $D_{\max}$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_{\max} = [0; \infty) = \mathbb{R}_0^+$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow D_{\max} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-1} : \begin{array}{l} \text{Zähler: } x \geq 0 \\ \text{Nenner: } \sqrt{x-1} \Rightarrow x \geq 1, \\ \sqrt{x-1} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \neq 1, \\ \Rightarrow D_{\max} = [0; \infty) \cap [1; \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}) = [1; \infty) \setminus \{2\}. \end{array}$$

- Nullstellen von Fkten: Zu einer gegebenen Fkt. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $N \subseteq D$ gesucht, die durch $N = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ bestimmt ist.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 6,$
 $x \in N \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow N = \{3\}$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 9,$
 $x \in N \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow N = \{-3; 3\}$

- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3}$

$$x \in N \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow N = \{-1\},$$

$$f: [3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x-3}$$

$$x \in N \Leftrightarrow x\sqrt{x-3} = 0, x \geq 3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow N = \{3\}.$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

gerade : $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}: f(-x) = f(x)$

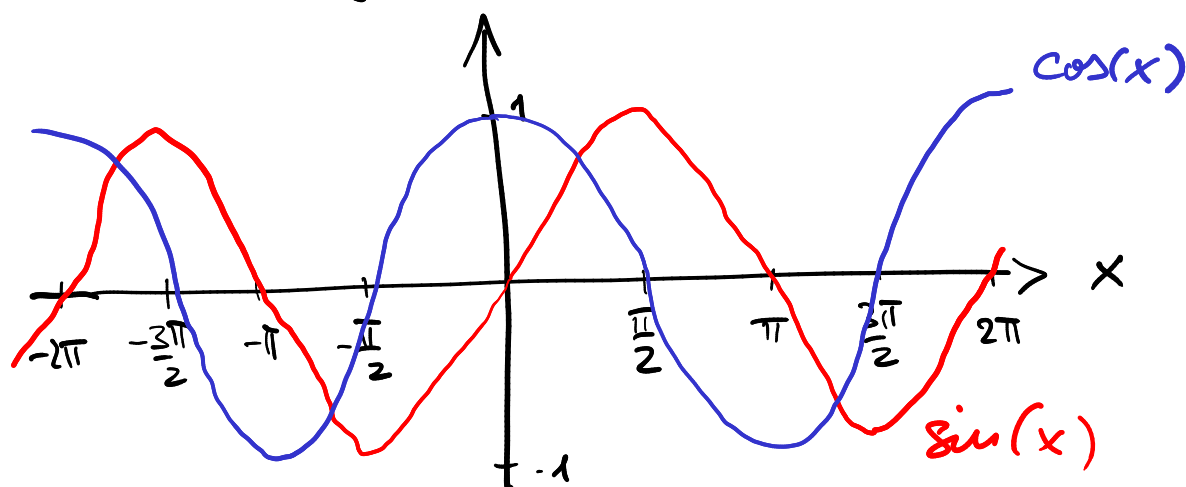
$\Leftrightarrow f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse,

ungerade : $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}: f(-x) = -f(x)$

$\Leftrightarrow f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$

$$x^n = \begin{cases} \text{gerade} & , \text{ falls } n = 0, 2, 4, \dots \\ \text{ungerade} & , \text{ falls } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$



$x \mapsto \sin(x)$ ist ungerade,
 $x \mapsto \cos(x)$ ist gerade.

• $f(x) = x \cdot \sin(x)$: $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin(x))$
 $= x \cdot \sin(x) = f(x)$
 $\Rightarrow f$ gerade

• $f(x) = \cos(x) \cdot x^3$:
 $f(-x) = \cos(-x) \cdot (-x)^3 = \cos(x) \cdot \underbrace{(-1)^3}_{=-1} \cdot x^3$
 $= -\cos(x) \cdot x^3 = -f(x)$

$\Rightarrow f$ ungerade

Asymptotisches Verhalten: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(I) in der Nähe von $x=0$

(II) für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$.

1 $f(x) = -3x^4 + 99x^3 - 1$

(I) Für $x=0$: $f(0) = -1$, der nächste Term, der das Verhalten von f bestimmt, ist $99x^3$

$$\Rightarrow f(x) \sim 99x^3 - 1, \text{ für } x \sim 0.$$

$$(II) f(x) \sim -3x^4, \text{ für } x \rightarrow \pm\infty,$$

und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x)\} = -\infty.$

$$f(x) = \frac{x - x^2 - 1}{1 + x^2}$$

$$(I) f(x) - (-1 + x) = \frac{x - x^2 - 1}{1 + x^2} + \frac{(1 + x^2)(1 - x)}{1 + x^2}$$

$$= \frac{\cancel{x - x^2 - 1} + \cancel{1 + x^2} - x - x^3}{1 + x^2} = -\frac{x^3}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim -1 + x, \quad x \sim 0$$

$$f(x) \rightarrow -1, \text{ für } x \rightarrow \pm\infty,$$

$$\text{da } f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1, \text{ für } |x| \rightarrow \infty.$$

Exponentialfkt: $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, $x \in \mathbb{R}$

(Für eine geeignete Wahl von α kann man jede Exponentialfunktion der Form a^x als $e^{\alpha x}$ schreiben, nämlich $a = e^{\alpha}$, allerdings müssen wir dafür $a > 0$ fordern.)

Aufgabe: Bestimme $C, a > 0$ so, dass $f(x) = C \cdot e^x$ die Werte $(x; y) = (2; 1)$ und $(3; 6)$ annimmt:

Die Forderungen sind also:

$$C \cdot a^2 = 1$$

$$C \cdot a^3 = 6$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{6}{1} = \frac{\cancel{C} \cdot a^3}{\cancel{C} \cdot a^2} = a \Rightarrow \underline{\underline{a=6}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{36} 6^x.$$

- Stoffmenge gemäß Gesetz $N(t) = N_0 \cdot a^{-t}$, $t \geq 0$.

a) Alle 15 min halbiert sich $N(t)$

b) Wie groß ist $N(t)$ für $t = 4h$, $\sqrt[N_0]{N_0 = 256 \text{ ml}}$ ^{falls}

$$a) \Rightarrow N(t + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$$

$$\Leftrightarrow N_0 \cdot a^{-t - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot N_0 \cdot a^{-t}$$

$$\Leftrightarrow N_0 \cdot a^{-t} \cdot a^{-\frac{1}{4}} = N_0 \cdot a^{-t} \cdot \frac{1}{2} \quad | \cdot \frac{a^t}{N_0}$$

$$\Leftrightarrow a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad | \text{hoch } (-4)$$

$$\Leftrightarrow a = (a^{-\frac{1}{4}})^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = (2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot 16^{-t}$$

$$N_0 = 256 \text{ ml}, t = 4h$$

$$\Rightarrow N(t) = 256 \text{ ml} \cdot 16^{-4} = \frac{256}{(256)^2} \text{ ml} = \frac{1}{256} \text{ ml}$$

Exponentialgle.:

$$3^x - 4 \cdot 3^{x-2} = 15$$

$$\Leftrightarrow 15 = 3^x - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot 3^x$$

$$= \frac{5}{9} \cdot 3^x \quad | \cdot \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 15 \cdot \frac{9}{5} = 27 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$

$$(7^x)^{2x-4} = (7^{x+4})^{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 7^{x(2x-4)} = 7^{(x+4)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 7^{2x^2-4x} = 7^{x^2+4x-2x-8} \quad | \cdot (7^{-2x^2+4x})$$

$$\Leftrightarrow 7^{x^2+2x-8} \cdot 7^{-2x^2+4x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 7^{-x^2+6x-8} = 1$$

$$p = -6, q = 8$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_{\pm} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2, \\ 4. \end{cases}$$

$$\mathbb{L} = \{2; 4\}.$$

Logarithmus ist Umkehrfkt des Exponentialfkt.

$$e^x = y (> 0) \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ist } \ln[e^x] = x, \\ &\text{Für alle } y \in \mathbb{R}^+ \text{ ist } \underline{e^{\ln(y)}} = y. \end{aligned}$$

$$\ln(x^2 - 7x + 11) = 0 \quad \left(\rightarrow \text{Wir suchen Lsgn } x, \text{ für die } x^2 - 7x - 11 > 0! \right)$$

$$x^2 - 7x + 11 = e^{\ln(x^2 - 7x + 11)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$p = -7, q = 10$$

$$\Rightarrow x_{\pm} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2; 5\}.$$

$$\ln[e^x - 5 \cdot e] = 1 \Rightarrow$$

$$e^x - 5e = e^{\ln[e^x - 5e]} = e^1 = e \quad | : e (= 2,71...)$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^{x-1} - 5 \quad | + 5$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} = 6 \quad | \ln$$

$$\Rightarrow x - 1 = \ln[6] \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 + \ln[6]}}$$