

Kap IV. Lineare Gleichungssysteme

Für ein LGS wie etwa

$$(I) \quad x - 5y + z = -6$$

$$(II) \quad -6x + 17y - 6z = -3$$

$$(III) \quad 2x + 3y - az = -1$$

sind alle Lsgn gesucht, d.h. alle reellen Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, für die (I), (II) und (III) gleichzeitig erfüllt sind. Dabei können 3 Fälle auftreten:

- Das LGS besitzt keine Lösung,
 $\mathbb{L} = \emptyset$;
- Das LGS besitzt genau eine Lösung,
 $\mathbb{L} = \{(x_*, y_*, z_*)\}$;
- Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen.

Im obigen Beispiel kommt erschwerend hinzu, dass die Lösungen von der Wahl des Parameters $a \in \mathbb{R}$ abhängen.

Wir bringen das LGS

$$(I) \quad x - 5y + z = -6$$

$$(II) \quad -6x + 17y - 6z = -3$$

$$(III) \quad 2x + 3y - az = -1$$

zunächst in eine Dreiecksform.

$$(I') = (I) \quad : \quad x - 5y + z = -6$$

$$(II') = (II) + 6(I) : \quad -13y = -39$$

$$(III') = (III) - 2(I) : \quad 13y - (a+2)z = 11$$

$(I') \Rightarrow \boxed{y = 3}$, dies in (I') und (III') einsetzen

$$\Rightarrow (I'') : \quad x - 15 + z = -6 \quad | +15 - z$$

$$(III'') : \quad 39 - (a+2)z = 11 \quad | + (a+2)z - 11$$

$$\Rightarrow (I''') : \quad x = 9 - z,$$

$$(III''') : \quad (a+2)z = 28.$$

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

① $a = -2$ $\Rightarrow (a+2)z = 0 = 28 \quad \downarrow$
ist immer falsch, denn $28 \neq 0$.

$\Rightarrow$ Für $a = -2$ besitzt LGS keine Lsg.,
 $\mathbb{L} = \emptyset$.

$$\textcircled{2.} \quad \underline{a \neq -2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{28}{a+2},$$

$$x = 9 - z = 9 - \frac{28}{a+2}.$$

$\Rightarrow$ Für $a \neq -2$ besitzt das LGS die eindeutige Lsg.

$$\underline{L} = \left\{ \left(9 - \frac{28}{a+2} ; 3 ; \frac{28}{a+2} \right) \right\}.$$