

Kap. III : Unglgen

* Quadratische Unglgen:

Gesucht sind wieder alle Lsgen von Unglgen des Typ $x^2 + px + q \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} 0$, d.h. wir suchen alle reellen Zahlen x , für die die Ungleichung (sinnvoll definiert und) erfüllt ist.

Löse $2x^2 \geq 2x + 12$.

1) Erstmal in Normalform bringen (s.o.)
durch Äquivalenzumformungen:

$$2x^2 \geq 2x + 12 \quad | -2x - 12$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 \geq 0 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0$$

2) Quadr. Ergänzung:

$$0 \leq x^2 - x - 6 = x^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)x - 6$$

$$= \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + 6\right)$$

$$\text{NR: } 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad | + \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{25}{4} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$$

Nun treten 2 Fälle auf: $x \geq \frac{1}{2}$ und $x < \frac{1}{2}$

$$\underline{x \geq \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq |x - \frac{1}{2}| = x - \frac{1}{2} \quad | + \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad (\text{CHECK: } \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \checkmark)$$

$$\underline{x < \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - x \quad | + x - \frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$ (CHECK: $\Rightarrow x < \frac{1}{2} \checkmark$)
Es muss $x \geq 3$ ODER $x \leq -2$ erfüllt sein, damit ungl. gilt

Wir erhalten $\mathbb{L} = (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$.

Anderes Bsp.: $2x^2 - 6x + 4 \geq 10(x^2 + x + 1)$

1) In Normalform bringen:

$$2x^2 - 6x + 4 \geq 10(x^2 + x + 1) = 10x^2 + 10x + 10$$
$$|-2x^2 + 6x - 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 8x^2 + 16x + 6 \quad | : 8$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq x^2 + 2x + \frac{3}{4}$$

2) Quodv. Ergz.:

$$0 \geq x^2 + 2 \cdot \textcircled{1} x + \frac{3}{4} = (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1) - (1 - \frac{3}{4})$$
$$= (x+1)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq (x+1)^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq |x+1|$$

Jetzt 2 Fälle: $x+1 \geq 0$, $x+1 < 0$:

$$\underline{x+1 \geq 0} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq |x+1| = x+1 \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq x$$

$$\underline{x+1 < 0} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq |x+1| = -1-x \quad | +x - \frac{1}{2}$$

$$(\Rightarrow) x \geq -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Beachte jetzt muss sowohl $x \geq -\frac{3}{2}$ als auch $x \leq \frac{1}{2}$ gelten, damit $|x+1| \leq \frac{1}{2}$ erfüllt ist!

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$$