

Kap. II

Gleichungen in einer Variablen

- Was ist eine Lösung einer Glg.?

$$x + 3 = 4 \quad (*)$$

Lösen bedeutet, alle $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Glg. (*) erfüllt ist

- Eine Glg ist eine Aussage. Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Aussage wahr ist.
- Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die (*) wahr ist, bezeichnen wir als Lösungsmenge $\mathbb{L}$.
- Die Menge $\mathbb{L}$ bestimmen wir durch Äquivalenzumformungen, die (*) in gleichwertige, aber einfachere Aussagen umwandeln:

$$(*) : \quad x + 3 = 4 \quad | -3$$

$$(\Leftrightarrow (**)) : \quad x = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}.$$

Bsp. (a) $5x - 7 = 15$ $| + 7$

$\Leftrightarrow$ (b) $5x = 22$ $| : 5$

$\Leftrightarrow$ (c) $x = \frac{22}{5}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{22}{5} \right\}$

(a) $2x^2 - 4x = 7$

1. Schritt: Bringe (a) durch Äq.-Umform. in die Normalform: $x^2 + px + q = 0$

(a) $2x^2 - 4x = 7$ $| : 2$

$\Leftrightarrow$ (b) $x^2 - 2x = \frac{7}{2}$ $| - \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow$ (c) $x^2 - 2x - \frac{7}{2} = 0$ Normalform mit $p = -2, q = -\frac{7}{2}$

p-q-Formel: Die Gg. $x^2 + px + q = 0$

hat die Lsgen

$$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

sofern $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$. Falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, hat Gg. $x^2 + px + q = 0$ keine Lsg.

$p = -2, q = -\frac{7}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{7}{2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}} = \\ &= 1 \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$

• Wurzelgleichungen

$$(a) \quad 4 \sqrt{x - \sqrt{x-4}} = 8$$

Damit die Gleichung überhaupt eine Aussage definiert, müssen wir $x \geq 4$ fordern (damit $\sqrt{x-4}$ existiert) und außerdem, dass $x \geq \sqrt{x-4}$ gilt. Diese Bedg. behalten wir im Hinterkopf.

$$(a) \Leftrightarrow (b) \quad \sqrt{x - \sqrt{x-4}} = 2 \quad | (\cdot)^2$$

$$\Rightarrow (c) \quad x - \sqrt{x-4} = (\sqrt{x - \sqrt{x-4}})^2 = 2^2 = 4.$$

Jetzt alle Wurzelteile auf eine Seite:

$$(c) \quad x - \sqrt{x-4} = 4 \quad | -4 + \sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow (d) \quad x-4 = \sqrt{x-4} \quad | (\cdot)^2$$

$$\Leftrightarrow (e) \quad (x-4)^2 = x-4$$

$$\uparrow$$
$$\Leftrightarrow (f) \quad x^2 - 8x + 16 = x - 4 \quad | -x + 4$$

$$\Rightarrow (g) \quad x^2 - 9x + 20 = 0 \quad (p = -9, q = 20)$$

$$\Rightarrow (h) \quad x_{\pm} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 20} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{80}{4}} \\ = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (i) \quad x_+ = 5, \quad x_- = 4$$

Also sind $x_+ = 5$ und $x_- = 4$ alle möglichen Lsgn.

Nun müssen wir noch die Bedingungen - und • überprüfen:

■ : $x_+ - 4 = 1 \geq 0$ ✓, $x_- - 4 = 0 \geq 0$ ✓

■ : $x_+ - \sqrt{x_+ - 4} = 5 - \sqrt{1} = 4 \geq 0$ ✓

$x_- - \sqrt{x_- - 4} = 4 - \sqrt{0} = 4 \geq 0$ ✓

Damit sind x_+ und x_- tatsächlich Lsg., und weil es keine anderen Lsgen geben kann, folgt $L = \{4, 5\}$.

• Betragslsgn.: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(a) $|x+1| + 4 = |2x-4|$

Nun müssen wir 4 Fälle unterscheiden:

1.1 : $(x+1 \geq 0) \wedge (2x-4 \geq 0)$,

1.2 : $(x+1 \geq 0) \wedge (2x-4 < 0)$,

2.1 : $(x+1 < 0) \wedge (2x-4 \geq 0)$,

2.2 : $(x+1 < 0) \wedge (2x-4 < 0)$

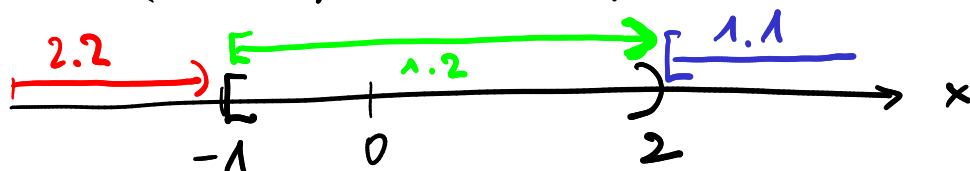
Diese sind jeweils äquivalent zu folgenden Fölln:

1.1 : $(x \geq -1) \wedge (x \geq 2) \Leftrightarrow x \geq 2$,

1.2 : $(x \geq -1) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow -1 \leq x < 2$,

2.1 : $(x < -1) \wedge (x \geq 2)$ nie erfüllt!

2.2 : $(x < -1) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow x < -1$.



1.1 : $x \geq 2$: $|x+1| = x+1$, $|2x-4| = 2x-4$

(a) $\Leftrightarrow (x+1) + 4 = x+5 = 2x-4 \quad | -x+4$ (b)

$\Leftrightarrow$ (c) $x = 9$ (jetzt prüfen: $x \geq 2$? $\checkmark$)

also ist $x = 9$ eine Lsg.

1.2 : $-1 \leq x < 2$: $|x+1| = x+1$, $|2x-4| = 4-2x$

(a) $\Leftrightarrow x+1+4 = |2x-4| = 4-2x \quad | +2x-5$

$\Leftrightarrow$ (b) $3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

(prüfe: $-1 \leq -\frac{1}{3} < 2$ $\checkmark$) $\Rightarrow -\frac{1}{3}$ ist Lsg.

2.2 : $x < -1$: $|x+1| = -x-1$, $|2x-4| = 4-2x$

(a) $\Leftrightarrow -x-1+4 = |x+1|+4 = |2x-4| = 4-2x \quad | +2x-3$

$\Leftrightarrow$ (b) $x = 1$ (prüfe: $1 < -1$ $\downarrow$
 $\Rightarrow x = 1$ ist keine Lsg.!))

$\Rightarrow L = \{-\frac{1}{3}; 9\}$.

Kerp III:

- Lineare Ungl.: $-3x - 7 \geq 4$ (a)
Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die (a) wahr ist.

$$(a) \quad -3x - 7 \geq 4 \quad | : (-3)$$

$$\Leftrightarrow (b) \quad x + \frac{7}{3} \leq -\frac{4}{3} \quad | - \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow (c) \quad x \leq -\frac{11}{3}$$

↑
auch $-\frac{11}{3}$ ist
eine Lsg.!

$$\Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty; -\frac{11}{3}]$$