Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

Technische Universität Braunschweig

12. Übungsblatt

Ausgabe: 22.01.2026

Abgabe: 29.01.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Lineare Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 12.1 (2+2+1 Punkte)

Es seien X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ eine lineare Abbildung. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne

$$\Phi^0 \;:=\; \mathbf{1}_X\,, \quad \Phi^k \;:=\; \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k-\text{fach}}\,.$$

Weiterhin sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von Φ. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist λ^k ein Eigenwert von Φ^k.

(b) Ist $P = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k \in \Pi_N$ ein komplexes Polynom, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von

$$P(\Phi) \;:=\; \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \Phi^k \;\in\; \mathcal{L}(X).$$

(c) Ist Φ invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von Φ^{-1}.

Aufgabe 12.2 (3+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie jeweils alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie eine Transformationsmatrizen $H \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $\det[H] \neq 0$ an, die B in eine Diagonalmatrix $H^{-1}BH$ überführt und berechnen Sie H^{-1} und $H^{-1}AH$.

Aufgabe 12.3 (2+3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Matrizen in $\mathbb{C}^{4\times 4}$ diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 27-3i & 9 & -321 \\ 27+3i & \pi^2 & -11i & e^{\sqrt{2}i\pi} \\ 9 & 11i & 42 & -i \\ -321 & e^{-\sqrt{2}i\pi} & i & 2026 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 (1+2+2 Punkte)

(a) Es sei X ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Weiterhin sei $\phi \in \mathcal{L}(X)$ eine Isometrie mit Eigenwert $\lambda \in \sigma(\phi)$. Zeigen Sie, dass $|\lambda| = 1$.

(b) Es sei

$$X = \left\{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

der $\mathbb{C}$-Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x \,|\, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

ein Skalarprodukt auf X definiert ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi : X \to X, \quad \Phi(x_0, x_1, x_3, \ldots) := (0, x_0, x_1, x_3, \ldots)$$

eine Isometrie auf X definiert und dass Φ nicht bijektiv ist.

Aufgabe 12.5 (4 Bonuspunkte) Diskrete Fouriertransformation

Die elektrische Leistung einer Photovoltaik-Anlage wird als periodische, symmetrische Funktion durch 4 Abtastwerte (Uhrzeit in hh:mm / Leistung in Relation zur PV-Nennleistung) beschrieben:

(0:00 / 0), (6:00 / 0,1), (12:00 / 0,8), (18:00 / 0,1)

(a) Bitte legen Sie den Abtastwert für $k = 0$ in das Maximum der periodischen, symmetrischen Funktion und geben Sie den angepassten Vektor $\vec{f}$ an!

(b) Nutzen Sie die Fourier-Matrix und stellen Sie bitte das Gleichungssystem für die Bestimmung des Vektors $\vec{c}$ der Fouriertransformation auf!

(c) Welche Amplitude und welche Periodendauer hat die Grundschwingung?

(d) Welche Amplitude und welche Periodendauer hat die 2. Harmonische?

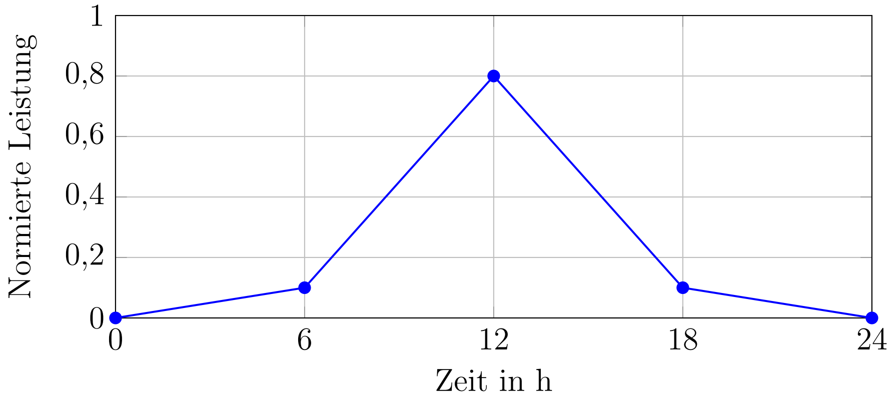

Abbildung 1: Leistung einer Photovoltaik-Anlage als Funktion der Uhrzeit