Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

11. Übungsblatt

Ausgabe: 15.01.2026

Abgabe: 22.01.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Lineare Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Im Folgenden seien $L \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_L$ der Restklassenring modulo L. Es sei $X := \{\mathbb{Z}_L \to \mathbb{C}\}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen Abbildungen auf $\mathbb{Z}_L$ mit ONB $\{\varphi_\xi \,|\, \xi = 0, \ldots, L-1\}$ (*vgl. IX.85*). Es sei

$$\mathcal{F} : X \to X, \; f \mapsto \hat{f}$$

die diskrete Fouriertransformation auf $\mathbb{Z}_L$.

Aufgabe 11.1 (3+2 Punkte)

Es sei $L = 4$ und damit $X = \{\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}\}$.

(a) Die Abbildungen $f, g \in X$ seien durch die Vektoren

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Berechnen Sie $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ und $\mathcal{F}(g) = \hat{g}$.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(fg) = \widehat{fg}$ des punktweisen Produktes von f und g.

Aufgabe 11.2 (5 Punkte)

Es sei $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ das unitäre Skalarprodukt auf X (*vgl. IX.84*). Zeigen Sie, dass

$$\langle f \,|\, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f) \,|\, \mathcal{F}(g) \rangle$$

für alle $f, g \in X$ gilt.

Aufgabe 11.3 (4+1 Punkte)

Die Matrix $T \in \mathbb{C}^{L\times L}$ sei durch

$$T = (t_{x,y})_{x,y=0}^{L-1}, \quad t_{x,y} = \begin{cases} 2\,, & \text{falls } x = y \\ -1\,, & \text{falls } x = y-1 \mod L \\ -1\,, & \text{falls } y = x-1 \mod L \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Nach dieser Definition hat T die Form

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2 & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen φ_ξ (in ihren Vektordarstellungen) für alle $0 \leq \xi \leq L-1$ Eigenvektoren der Matrix T sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

(b) Entscheiden Sie begründet, ob T diagonalisierbar ist, und diagonalisieren Sie T falls möglich.

Aufgabe 11.4 (4+1 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Entscheiden Sie begründet, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 11.5 (4 Bonuspunkte) Skalarprodukt

2 Plattenelektroden haben einen Abstand von 0,04 m in y-Richtung und eine Länge von 0,1 m in x-Richtung. Die Ladungen auf den Plattenelektroden erzeugen im Zwischenraum eine elektrische Feldstärke von $E = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ in y-Richtung. Eine Punktladung mit der Ladungsmenge Q bewegt sich auf dem Weg $\vec{s}$ vom Anfangspunkt P_1 durch den Elektroden-Zwischenraum zum Punkt P_2.

Berechnen Sie bitte bei a) bis c) die jeweilige Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ der Punktladung!

(a) Die Punktladung hat die Ladungsmenge $Q = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}$ und bewegt sich von Punkt $P_1 = (-0{,}05; 0{,}02)$ zu Punkt $P_2 = (0{,}05; 0{,}02)$.

(b) Die Punktladung mit der Ladungsmenge $Q = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$ bewegt sich auf dem Weg $\vec{s} = (0; 0{,}04)$ durch den Zwischenraum.

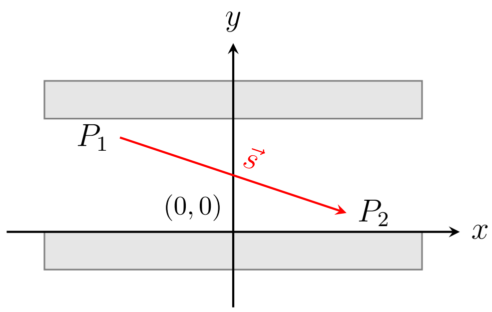

Abbildung 1: Beispielhafte nicht maßstabsgetreue Anordnung der Plattenelektroden

(c) Eine Punktladung mit der Ladungsmenge $Q = 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$ bewegt sich auf dem Weg $\vec{s}$ von Punkt $P_1 = (0; 0{,}04)$ durch den Zwischenraum zu Punkt $P_2 = (0; 0)$.

(d) Eine Punktladung bewegt sich von Punkt $P_1 = (-0{,}05; 0)$ zu Punkt $P_2 = (0{,}05; 0{,}04)$ und nimmt eine Energie von $2\,\mathrm{N\,m}$ auf. Wie groß ist die Ladungsmenge Q in C der Punktladung?