Prof. Dr. Volker Bach
M.Sc. Merten Mlinarzik

10. Übungsblatt

Ausgabe: 08.01.2026

Abgabe: 15.01.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Lineare Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 10.1 (3+2 Punkte)

(a) Es sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch die Abbildungen

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_0^+, \quad \|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|$$

und

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_0^+, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

jeweils eine Norm auf $\mathbb{C}^N$ gegeben ist.

(b) Es sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ und induzierter Norm

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle}\,.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die allgemeine Parallelogrammidentität

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \ + \ \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \ = \ 2\big(\|\vec{x}\|^2 \ + \ \|\vec{y}\|^2\big)$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in X$ gilt.

Aufgabe 10.2 (4+1 Punkte)

(a) Es sei X ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ und $P \in \mathcal{L}(X)$ sei eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass P genau dann eine orthogonale Projektion (gemäß IX.54) ist, wenn

$$(\mathrm{ran}[P])^\perp \ = \ \ker[P]\,.$$

(b) Geben Sie eine Projektion $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ an, welche keine orthogonale Projektion bezüglich des euklidschen Skalarproduktes ist.

Hinweis: Denken Sie an Große Übung 5.3 und 5.4.

Aufgabe 10.3 (4+1 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem euklidschen Skalarprodukt.

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix}\frac{-2}{3\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie jeweils begründet, ob es sich bei den Mengen $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ und $\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ um orthonormale Mengen handelt.

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x}_1 = \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 + \alpha_3\vec{y}_3 .$$

Aufgabe 10.4 (5 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

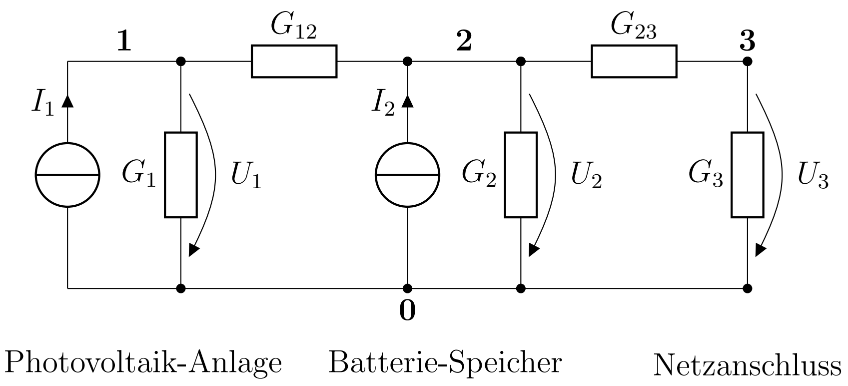
Wenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, bezüglich des euklidschen Skalarproduktes, auf die Basis $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\} \subset \mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 10.5 (4 Bonuspunkte) Berechnung eines Gleichstromnetzwerks

In der Abbildung ist ein Gleichstromnetzwerk gezeigt. Darin sind 2 Stromquellen und 5 Leitwerte miteinander elektrisch verbunden. Das Netzwerk hat 3 Knoten und einen Referenzknoten 0, zu dem die Knotenspannungen U_i definiert sind. Die Verbindungselemente G_{12} und G_{23} sind niederohmig ausgeführt. G_1 und G_2 stellen die Innenwiderstände der Stromquellen dar und repräsentieren die Verluste. G_3 ist der Leitwert des Netzanschlusses.

Bitte verwenden Sie für die Berechnung die Größen in den Einheiten Milli-Siemens (mS), Volt (V) und Milli-Ampere (mA). Rechnen Sie nur mit den Zahlenwerten ohne Einheiten. Da sich die Leitwerte um Größenordnungen unterscheiden, ist es wichtig die Zahlenwerte mit 4 Nachkommastellen anzugeben. Eine Beispielrechnung findet sich in den RMA-Vorlesungsunterlagen vom 9.1.2026.

Gleichungssystem nach Vorlesung Lineare Algebra: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ hier: $G \cdot \vec{u} = \vec{i}$



$G_1 = 10\,\mathrm{mS}$	$G_{12} = 1000\,\mathrm{mS}$	$I_1 = 20\,000\,\mathrm{mA}$
$G_2 = 10\,\mathrm{mS}$	$G_{23} = 1000\,\mathrm{mS}$	$I_2 = -5000\,\mathrm{mA}$
$G_3 = 50\,\mathrm{mS}$		

Abbildung 1: Gleichstromnetzwerk

Berechnen Sie den Spannungsvektor $\vec{u}$ durch Ermitteln der rechten oberen Dreiecksmatrix (Leitwertmatrix) G' und den angepassten Spaltenvektor $\vec{i}'$ (Stromvektor) bzw. die Darstellung für $A^{(3)}$ und $\vec{b}^{(3)}$ in Anlehnung an Schritt 2 aus der großen Übung 8.4. Bearbeiten Sie dafür die nachfolgenden Schritte:

(a) Geben Sie das Gleichungssystem mit Leitwertmatrix G, Spannungsvektor $\vec{u}$ und Stromvektor $\vec{i}$ an!

(b) Bestimmen Sie für das aufgestellte Gleichungssystem die rechte obere Dreiecksmatrix $A^{(3)}$.

(c) Geben Sie den aus den Umformungen folgenden Spaltenvektor $\vec{b}^{(3)}$ an.

(d) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\vec{u}$ für die Knotenspannungen 1 bis 3 zum Bezugsknoten 0 und geben Sie diese bitte in Volt an!