9. Übungsblatt

Ausgabe: 18.12.2025

Abgabe: 08.01.2026, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Lineare Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 9.1 (2+1+2 Punkte)

Es seien $A \in \mathbb{K}^{N \times K}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^N$. Wir definieren die *Lösungsmenge* des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ als

$$L(A;\vec{b}) \;:=\; \left\{\vec{x} \in \mathbb{K}^K \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{b}\right\}.$$

(a) Angenommen, es existiert eine Lösung $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^K$ von $A\vec{x} = \vec{b}$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge in diesem Fall durch

$$L(A;\vec{b}) \;=\; \vec{x}_0 \;+\; \ker[\Phi_A]$$

gegeben ist, wobei $\Phi_A \in \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^K, \mathbb{K}^N\big)$ die Matrixabbildung zu A beschreibt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\left|L(A;\vec{b})\right| \;\in\; \{0, 1, \infty\}.$$

(c) Geben Sie $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \in \mathbb{K}^3$ an, mit

$$\left|L\Big(A_1, \vec{b}_1\Big)\right| \;=\; 0\,, \quad \left|L\Big(A_2, \vec{b}_2\Big)\right| \;=\; 1\,, \quad \left|L\Big(A_3, \vec{b}_3\Big)\right| \;=\; \infty\,.$$

Aufgabe 9.2 (5 Punkte)

Nutzen Sie das Verfahren aus der Großen Übung (GÜ 8.3) um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 1x_4 & + & 1x_5 & = & 5\,, \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 0x_4 & - & 2x_5 & = & 0\,, \\
0x_1 & - & 1x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & + & 0x_5 & = & -1\,, \\
1x_1 & + & 1x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 2\,.
\end{array}$$

zu bestimmen. Geben Sie dabei die Matrizen G_i explizit an.

Aufgabe 9.3 (5 Punkte)

Es seien $A \in \mathbb{K}^{N\times K}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^N$ mit $N > K$. Geben Sie ein Verfahren an, mit welchem sich die Lösungsmenge $L(A;\vec{b})$ bestimmen lässt. Begründen Sie, warum Ihr Verfahren die korrekte Lösung liefert.

Hinweis: Nutzen Sie Schritt 2 aus dem Verfahren aus der Größen Übung (GÜ 8.3).

Aufgabe 9.4 (1+2+2 Punkte)

Es sei $V \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Die Abbildung Q_V sei durch

$$Q_V :\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,, \quad (\vec{x},\vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} \,|\, V\vec{y} \rangle$$

definiert, wobei $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ beschreibt.

(a) Zeigen Sie, dass Q_V eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^N$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass Q_V genau dann symmetrisch ist, wenn $A = A^T$.

(c) Bestimmen Sie Matrizen $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass Q_{V_1} positiv definit, Q_{V_2} positiv semidefinit aber nicht positiv definit, und Q_{V_3} indefinit ist.