Technische Universität Braunschweig

8. Übungsblatt

Ausgabe: 11.12.2025

Abgabe: 18.12.2025, 13:15 Uhr

Abgabe in den gelben Briefkästen vor PK 4.3 mit der Beschriftung "Linear Algebra für Elektrotechnik WiSe 25/26 – Übungsgruppe XX"

Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe

Aufgabe 8.1 (5 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) $\det[M] = 0$.

(ii) Die Spaltenvektoren von M sind linear abhängig.

(iii) Die Zeilenvektoren von M sind linear abhängig.

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)

Es seien $N \in \mathbb{N}$ und X ein N-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter sei $\Psi \in \mathcal{L}(X)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Die Abbildung Ψ ist bijektiv.

(ii) $\det[\Psi] \neq 0$.

(iii) Für jede Basis $\mathcal{X}$ von X gilt, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Psi] \in \mathbb{K}^{N\times N}$ invertierbar ist.

(iv) Es existiert eine Basis $\mathcal{X}$ von X so, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}[\Psi] \in \mathbb{K}^{N\times N}$ invertierbar ist.

Aufgabe 8.3 (2+3 Punkte)

Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ sei durch

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Determinante und die Inverse von L. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung *(siehe Abschnitt VIII.2 und VIII.3)* und geben Sie die Matrizen G_j und $\widehat{G}_i$ explizit an.

Aufgabe 8.4 (1+2+2 Punkte)

(a) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1} - A^k \;=\; (\mathbb{1} - A)\left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) \;=\; \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right)(\mathbb{1} - A)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, wobei wir $A^0 = \mathbb{1}$ setzen.

(b) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $V \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $V^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrizen V und $\mathbb{1} - V$ auf Invertierbarkeit. Geben Sie gegebenenfalls die inverse Matrix an.

(c) Bestimmen Sie die Inverse von

$$B \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$